420 Ciągi i szeregi funkcyjne

Definicja

- Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,\ldots$, gdzie K oznacza ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych. Ciąg (f_n) nazywamy *ciągiem funkcyjnym*.

Definicja

- Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n), gdzie $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,\ldots$ jest *zbieży punktowo* do funkcji $f : X \to K$ na zbiorze X, gdy $\forall x \in X \; |f_n(x) - f(x)| \to 0$, tzn.

$$\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_{\varepsilon,x} \in N \, \forall n \geq n_{\varepsilon,x} \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Funkcję $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ nazywamy *granicą punktową* ciągu funkcyjnego (f_n). Piszemy wtedy $f_n(x) \to f(x)$ dla każdego $x \in X$.

Przykład

$f_n(x) = x^n$, $x \in <0,+\infty)$. Jaka funkcja jest granicą punktową dla ciągu $(f_n(x))$?

Definicja

- Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n), gdzie $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,\ldots$ jest *zbieżny jednostajnie* do funkcji $f : X \to K$ na zbiorze X, gdy $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N \, \forall n \geq n_\varepsilon \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Funkcję $f(x)$ nazywamy *granicą jednostajną* ciągu funkcyjnego (f_n). Piszemy wtedy $f_n \rightrightarrows f$ na zbiorze X.

Uwaga

- Zbieżność jednostajna ciągu implikuje zbieżność punktową.
- Granicą jednostajną ciągu funkcyjnego może być jedynie funkcja będąca granicą punktową tego ciągu.
- Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na zbiorze X, to również $f_n \rightrightarrows f$ na każdym podzbiorze $Y \subset X$.
- Mimo, że $f_n \not\to f$ na zbiorze X (punktowo lub jednostajnie), ciąg (f_n) może być zbieżny (punktowo lub jednostajnie) na pewnym podzbiorze $Y \subset X$.

Przykłady

- $f_n(x) = x^n$. Wtedy
  - ciąg (f_n) nie jest zbieżny jednostajnie na przedziale $<0,1>$.
  - Jeśli $0 < \delta \le 1$ to ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $<0,1-\delta>$.
- Ciąg $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ jest zbieżny jednostajnie na $<0,1>$.
- Ciąg $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ nie jest zbieżny jednostajnie na $<0,1>$.

Kryterium Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego

- Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,\ldots$, gdzie K oznacza ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych. Ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie na zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N \forall n, m \ge n_\varepsilon \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Dowód

Definicja

- Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,\ldots$, gdzie K oznacza ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych. Szereg $\sum_n f_n(x)$ nazywamy *szeregiem funkcyjnym*.

Definicja

- Szereg funkcyjny $\sum_n f_n(x)$, gdzie $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,\ldots$ nazywamy *zbieżnym punktowo* do funkcji $f : X \to K$ na zbiorze X, gdy jego ciąg funkcyjny sum częściowych $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ jest zbieżny punktowo do funkcji f na zbiorze X, tzn. $\forall x \in X \; |s_n(x) - f(x)| \to 0$, a więc

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon,x} \in N \forall n \ge n_{\varepsilon,x} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

- Funkcję $f(x)$ nazywamy *sumą punktową szeregu* $\sum_n f_n(x)$. Piszemy wtedy $f(x) = \sum_n f_n(x)$ dla każdego $x \in X$.

Przykład

$f_n(x) = x^n$, $x \in <0,1)$. Jaka funkcja jest sumą punktową szeregu $\sum_n f_n(x)$?

Definicja

- Szereg funkcyjny $\sum_n f_n(x)$, gdzie $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,...$ nazywamy *zbieżnym jednostajnie* do funkcji $f : X \to K$ na zbiorze X, gdy jego ciąg funkcyjny sum częściowych $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na zbiorze X, tzn. $\sup_{x\in X} |s_n(x) - f(x)| \to 0$, a wiec

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N \forall n \geq n_\varepsilon \sup_{x\in X} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

- Funkcję $f(x)$ nazywamy *sumą jednostajną* szeregu funkcyjnego $\sum_n f_n(x)$.

  Piszemy wtedy $\sum_n f_n \rightrightarrows f$ na zbiorze X.

Przykład

- $f_n(x) = x^n$. Wtedy
  - Szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ nie jest zbieżny jednostajnie na przedziale $< 0,1)$.
  - Jeśli $0 < \delta \leq 1$ to szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $< 0,1-\delta >$ do funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Uwaga

- Zbieżność jednostajna szeregu implikuje zbieżność punktową.
- Sumą jednostajną szeregu funkcyjnego może być jedynie funkcja będąca sumą punktową tego szeregu.

Kryterium Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego

- Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,...$, gdzie K oznacza ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych. Szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N \forall n > m \geq n_\varepsilon \sup_{x\in X} \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Dowód

Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego

- Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $f_n : X \to K$ dla $n = 1,2,3,\ldots$, gdzie K oznacza ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych. Jeżeli istnieje ciąg (a_n) nieujemnych liczb rzeczywistych taki, że
  - $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \le a_n$ dla wszystkich liczb $n \in N$,
  - $\sum a_n < +\infty$,

  to szereg funkcyjny $\sum f_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na zbiorze X.

Dowód

Funkcja dzeta Riemanna

- Funkcja $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, dla $x \in (1,+\infty)$ przyjmuje skończone wartości.
  - Pytanie o wartość funkcji $\zeta(x)$ (w dowolnym x) nadal nie jest rozwiązane.
  - Hipoteza Riemanna (1859):

    „Wszystkie rozwiązania równania $\zeta(z) = 0$, $z \in C$, leżą na jednej prostej.”

  nadal nie jest udowodniona.

Kryterium Abela zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego

- Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $f_n : X \to R$ dla $n = 1,2,3,\ldots$. Jeżeli
  - $f_n(x) \ge 0$ dla wszystkich $n \in N$ i $x \in X$,
  - ciąg liczbowy $(f_n(x))$ jest monotoniczny dla każdego $x \in X$,
  - ciągi liczbowe $(f_n(x))$ są wspólnie ograniczone, tzn. dla pewnej liczby $0 \le M < +\infty$

    $$\sup_{x\in X} \sup_{n\in N} |f_n(x)| \le M,$$

  - szereg funkcyjny $\sum g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X,

to szereg $\sum f_n(x) g_n(x)$ jest również jednostajnie zbieżny na X.

Dowód

Kryterium Dirichletta zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego

- Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $f_n : X \to R$ dla $n = 1,2,3,\ldots$. Jeżeli
  - $f_n(x) \ge 0$ dla wszystkich $n \in N$ i $x \in X$,
  - ciąg liczbowy $(f_n(x))$ jest nierosnący dla każdego $x \in X$,
  - ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do 0 na X,
  - ciąg sum częściowych szeregu $\sum g_n(x)$ jest jednostajnie wspólnie ograniczony na X, tzn. dla pewnej liczby $0 \le M < +\infty$

$$\sup_{x\in X}\left|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \le M ,$$

to szereg $\sum f_n(x)g_n(x)$ jest również jednostajnie zbieżny na X .

Dowód

Przykład

- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale $<\delta, 2\pi-\delta>$, gdzie $0<\delta<\pi$.
- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ nie jest jednostajnie zbieżny na przedziale $(0,2\pi)$.