470 Szeregi Fouriera

funkcji 2π -okresowych

- Jeśli $f :< -\pi,\pi > \to R$ jest funkcją bezwzględnie całkowalną na przedziale $< -\pi,\pi >$ (w sensie właściwym lub niewłaściwym), to istnieją współczynniki Fouriera (a_n), (b_n) funkcji f względem układu trygonometrycznego.
  Pytania:
  - Kiedy szereg Fouriera $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ jest zbieżny?
  - Jaki jest wzór na sumę szeregu $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$?
  - Czy $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x)$?

Całka Dirichletta

- Jeśli $f : R \to R$ jest funkcją bezwzględnie całkowalną na przedziale $< -\pi,\pi >$ to $n-$ta suma częściowa szeregu Fouriera funkcji f w punkcie $x_0 \in < -\pi,\pi >$ względem układu trygonometrycznego przedstawia się wzorem

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(u-x_0)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x_0)}du .$$

Całkę tę nazywamy *całką Dirichletta*. Punkt x_0 jest punktem osobliwym całki Dirichletta. Funkcję

$$u \to \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(u-x_0)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x_0)}$$

nazywamy *jądrem Dirichletta*.

Dowód

Wzór na $n-$tą sumę częściową funkcji 2π -okresowej

- Jeśli $f : R \to R$ jest funkcją bezwzględnie całkowalną na przedziale $< -\pi,\pi >$ i 2π -okresową, to $n-$ta suma częściowa szeregu Fouriera funkcji f w punkcie $x_0 \in R$ względem układu trygonometrycznego przedstawia się wzorem

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0+t)-f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt .$$

Punkt $t=0$ jest punktem osobliwym tej całki.

Dowód

Zasada lokalizacji Riemanna

- Jeśli $f: R \to R$ jest funkcją bezwzględnie całkowalną na przedziale $< -\pi, \pi >$ i 2π -okresową, to zbieżność szeregu Fouriera funkcji f w punkcie $x_0 \in R$ względem układu trygonometrycznego zależy wyłącznie od wartości funkcji f przyjmowanych w otoczeniu punktu x_0.

Dowód

Wzór na $n-$tą sumę częściową funkcji 2π -okresowej 2

- Niech $f: R \to R$ będzie funkcją bezwzględnie całkowalną na przedziale $< -\pi, \pi >$ i 2π -okresową. Oznaczmy przez A zbiór punktów ciągłości funkcji f,

$$S(x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{gdy } x_0 \in A \\ \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} & \text{gdy } x_0 \notin A \end{cases},$$

i niech $\varphi(x_0, t) = f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - 2S(x_0)$. Wtedy $n-$ta suma częściowa szeregu Fouriera funkcji f w punkcie $x_0 \in R$ względem układu trygonometrycznego przedstawia się wzorem

$$S_n(x_0) = S(x_0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x_0, t)\frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt.$$

Punkt $t = 0$ jest punktem osobliwym tej całki.

Dowód

Kryterium Diniego

- Niech $f: R \to R$ będzie funkcją bezwzględnie całkowalną na przedziale $< -\pi, \pi >$ i 2π -okresową. Szereg Fouriera funkcji f względem układu trygonometrycznego jest zbieżny w punkcie $x_0 \in R$ do sumy $S(x_0)$, gdy całka

$$\int_0^h \frac{|\varphi(x_0, t)|}{t}dt$$

jest zbieżna dla pewnego $h > 0$.

Dowód

Całki w kryterium Diniego

- W kryterium Diniego występują następujące całki:
  - $\displaystyle\int_0^h \frac{|f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - 2f(x_0)|}{t}dt$ gdy $S(x_0) = f(x_0)$,

- $\int_0^h \frac{| f(x_0-t)+f(x_0+t)-f(x_0-0)-f(x_0+0)|}{t}dt$ gdy
  $S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

- Powyższe całki są zbieżne, gdy zbieżne są całki:
  - $\int_0^h \frac{| f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}dt$, $\int_0^h \frac{| f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}dt$ gdy $S(x_0)=f(x_0)$,
  - $\int_0^h \frac{| f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}dt$, $\int_0^h \frac{| f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}dt$ gdy
    $S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Definicja

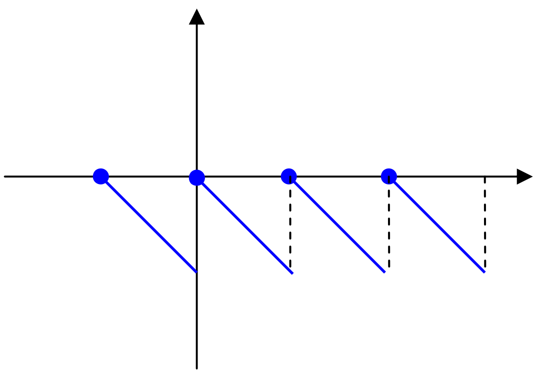
- Funkcję $f :< a,b >\to R$ nazywamy *przedziałami różniczkowalną* na $< a,b >$, gdy istnieje skończony podział $a=a_0<a_1<...<a_p=b$ przedziału $< a,b >$ taki, że funkcje $f_k :< a_{k-1},a_k >\to R$ zdefiniowane wzorem

$$f_k(x)=\begin{cases} f(a_{k-1}+0) & \text{gdy} \quad x=a_{k-1} \\ f(x) & \text{gdy} \quad a_{k-1}<x<a_k \\ f(a_k-0) & \text{gdy} \quad x=a_k \end{cases}$$

  są różniczkowalne na przedziale (a_{k-1},a_k) i na końcach tego przedziału posiadają pochodne jednostronne.

Przykład

- Funkcja $f(x)=[x]-x$ jest przedziałami różniczkowalna na każdym przedziale $< a,b >$.



Kryterium dla funkcji przedziałami różniczkowalnych

- Niech $f:R\to R$ będzie funkcją bezwzględnie całkowalną na przedziale $<-\pi,\pi>$ i 2π -okresową. Jeżeli dodatkowo funkcja f jest przedziałami różniczkowalna na $<-\pi,\pi>$, to szereg Fouriera funkcji f względem układu trygonometrycznego jest zbieżny w każdym punkcie $x_0\in R$ do sumy $S(x_0)$.

Dowód

Warunek Lipschitza

- Mówimy, że funkcja $f:(a,b)\to R$ spełnia warunek Lipschitza w otoczeniu punktu $x_0\in(a,b)$ ze stałą $0<\alpha\le 1$, gdy istnieją liczby $L>0$ i $\delta>0$ takie, że

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|\le L|t|^{\alpha}$$

dla wszystkich $|t|<\delta$ takich, że $x_0+t\in(a,b)$.

Uwaga

- Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to R$ spełnia warunek Lipschitza w otoczeniu punktu $x_0\in(a,b)$ ze stałą $0<\alpha\le 1$, to jest ona ciągła w punkcie x_0.

Kryterium Lipschitza

- Niech $f:R\to R$ będzie funkcją 2π -okresową. Jeżeli funkcja f spełnia warunek Lipschitza w otoczeniu punktu $x_0\in R$ ze stałą $0<\alpha\le 1$, to szereg Fouriera funkcji f względem układu trygonometrycznego jest zbieżny do sumy $f(x_0)$, tzn.

$$f(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0).$$

Dowód

Postać zespolona szeregu trygonometrycznego

- Niech $f:<-\pi,\pi>\to R$ będzie taką funkcją, że dla każdego $n\ge 0$ istnieją całki oznaczone $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ i $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$. Wtedy szereg Fouriera dla funkcji f względem układu trygonometrycznego przedstawia się wzorem

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ikx},$$

gdzie

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx \quad \text{dla } k=0,\pm1,\pm2,...$$

Uwaga

- $c_0=\frac{1}{2}a_0$,
- $c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$, dla $k=1,2,...$,
- $c_k=\frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k})$, dla $k=-1,-2,...$,

gdzie $a_0,b_1,a_1,...$ są współczynnikami Fouriera dla funkcji f względem układu trygonometrycznego.