Uwaga 8.5.2. *W twierdzeniu 8.5.1 nie można opuścić założenia o jednostajnej zbieżności ciągu* $(f_n')_{n=1}^{\infty}$*, nawet kosztem wzmocnienia założenia o zbieżności ciągu* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$*. Istotnie, rozważmy ciąg funkcyjny* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *określony wzorami*

$$f_n(x) = 2|x| \quad \text{dla} \quad |x| \geqslant \frac{1}{n} \qquad \text{oraz} \quad f_n(x) = \frac{n^2x^2+1}{n} \quad \text{dla} \quad |x| < \frac{1}{n}.$$

Można pokazać, że

(a) *ciąg* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest jednostajnie zbieżny do funkcji* $f(x) = 2|x|$*,* $x \in \mathbb{R}$*, która nie jest różniczkowalna,*

(b) *ciąg pochodnych jest zbieżny do funkcji* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *określonej wzorami* $g(x) = -2$ *dla* $x < 0$*,* $g(0) = 0$ *oraz* $g(x) = 2$ *dla* $x > 0$*.*

Wniosek 8.5.3. *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *będzie szeregiem funkcji różniczkowalnych na przedziale* $[a,b]$*. Jeśli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ *jest jednostajnie zbieżny (na* $[a,b]$*) oraz dla pewnego* $x_0 \in [a,b]$ *szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *jest zbieżny, to*

(a) *szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny i jego suma* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją różniczkowalną,*

(b) $s' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$*, to znaczy* $s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *dla* $x \in [a,b]$*.*

8.6 Szeregi potęgowe + CAŁKOWALNOŚĆ

W punkcie 5.9 wprowadziliśmy pojęcie szeregu potęgowego. W świetle wprowadzonych w tym rozdziale pojąć, jest to szereg funkcyjny postaci

(8.12) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$ gdzie $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ustalonym ciągiem liczbowym oraz x_0 ustalonym punktem.

Biorąc $\varrho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, zgodnie z (5.10), promieniem zbieżności szeregu (8.12) jest

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \varrho = +\infty, \\ 1/\varrho & \text{dla} \quad 0 < \varrho < +\infty, \\ +\infty & \text{dla} \quad \varrho = 0. \end{cases}$$

Z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda 5.9.1 wiadomo, że szereg (8.12) jest zbieżny bezwzględnie w przedziale $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\}$ (zwanym przedziałem zbieżności szeregu potęgowego) oraz rozbieżny dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $|x - x_0| > R$.

Twierdzenie 8.6.1. *Niech* $R > 0$ *będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego (8.12). Wówczas dla każdego* $r \in \mathbb{R}$ *takiego, że* $0 < r < R$*, szereg (8.12) jest jednostajnie zbieżny w przedziale* $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leqslant r\}$*.*

Dowód. Weźmy dowolne $r \in \mathbb{R}$ takie, że $0 < r < R$. Wówczas $x_0 + r$ należy do przedziału zbieżności szeregu (8.12). Ponieważ szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie w swoim przedziale zbieżności, więc szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ jest zbieżny. Ponadto dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $|x - x_0| \leqslant r$ mamy $|a_n(x - x_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$ dla $n \geqslant 0$. Zatem z kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregów 8.3.4 dostajemy zbieżność jednostajną szeregu (8.12) w $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leqslant r\}$. To daje tezę. □

Definicja. *Szeregiem pochodnych szeregu* (8.12) nazywamy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$.

Uwaga 8.6.2. *Szereg pochodnych szeregu potęgowego można traktować jako szereg potęgowy, bowiem można go zapisać w postaci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n$.

Własność 8.6.3. *Promienie zbieżności szeregu potęgowego (8.12) i szeregu pochodnych* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ *są równe.*

Dowód. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}.$$

Zatem promienie zbieżności szeregu (8.12) i szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^n$ są równe. Dla $x \neq x_0$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg pochodnych $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$. Reasumując mamy tezę. □

Twierdzenie 8.6.4. *Niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego (8.12) oraz niech f będzie sumą tego szeregu w przedziale zbieżności $P = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\}$. Wówczas funkcja f jest klasy C^∞ w P oraz*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!a_n}{(n-k)!}(x - x_0)^{n-k} \qquad \text{dla} \quad x \in P. \tag{8.13}$$

Dowód. W myśl własności 8.6.3, promienie zbieżności szeregu (8.12) i szeregu pochodnych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ są równe. Pokażemy (8.13) dla $k = 1$. Istotnie, weźmy dowolny $x_1 \in P$ i niech $r \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $|x_1 - x_0| < r < R$. Wobec twierdzenia 8.6.1, szereg (8.12) i jego szereg pochodnych są jednostajnie zbieżne w przedziale otwartym $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$. Zatem z wniosku 8.5.3 dostajemy (8.13) dla $k = 1$. Postępując dalej indukcyjnie dostajemy (8.13) dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. W konsekwencji f jest funkcją klasy C^∞. To daje tezę. □

Z twierdzenia 8.6.4 dostajemy natychmiast

Wniosek 8.6.5. *Niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego (8.12) oraz niech f będzie sumą tego szeregu w przedziale zbieżności $P = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\}$. Wówczas funkcja f jest ciągła w P.*

Definicja rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy. Jeśli funkcja f w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ jest sumą szeregu potęgowego o środku x_0 postaci,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{w pewnym otoczeniu punktu} \quad x_0, \tag{8.14}$$

to mówimy, że *funkcja f rozwija się w otoczeniu punktu x_0 w szereg potęgowy* lub *w szereg Taylora*. Wtedy szereg w (8.14) nazywamy *rozwinięciem funkcji f w szereg potęgowy w otoczeniu punktu x_0* lub *rozwinięciem w szereg Taylora*.

Twierdzenie 8.6.6. *Jeśli funkcja f rozwija się w pewnym otoczeniu punktu x_0 w szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, to rozwinięcie to jest określone jednoznacznie, ponadto*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8.15}$$

W szczególności rozwinięcie funkcji f w szereg Taylora jest szeregiem Taylora tej funkcji.

Dowód. W myśl twierdzenia 8.6.4 mamy, że f jest funkcją klasy C^∞ w pewnym otoczeniu punktu x_0, ponadto, z (8.13) mamy $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ dla $k \in \mathbb{N}$ i oczywiście $f(x_0) = a_0$. To daje (8.15) i, że współczynniki rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy są określone jednoznacznie, a więc rozwinięcie jest określone jednoznacznie. □

Uwaga 8.6.7. *Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorami $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ dla $x > 0$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$ jest klasy C^∞, ponadto $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, \ldots$, więc suma szeregu Taylora tej funkcji znika tożsamościowo. Zatem, wobec twierdzenia 8.6.6 funkcja ta nie rozwija się w szereg potęgowy w otoczeniu punktu 0*

Twierdzenie 8.6.8. *Rozwinięciem funkcji $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1)$, w szereg potęgowy w otoczeniu zera jest*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{dla} \quad x \in (-1, 1). \tag{8.16}$$

Dowód. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|} = 1$, więc z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda 5.9.1 dostajemy, że szereg potęgowy po prawej stronie (8.16) jest zbieżny w $(-1, 1)$. Zatem z twierdzenia 8.6.4, suma $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ tego szeregu jest różniczkowalna oraz

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} \quad \text{dla} \quad x \in (-1, 1).$$

Z drugiej strony $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ dla $x \in (-1, 1)$, więc $f' = g'$. Stąd i z wniosku 7.3.11, funkcja $f - g$ jest stała w $(-1, 1)$. Ponieważ $f(0) = 0$ i $g(0) = 0$, więc $f = g$. To daje tezę. □

Definicja funkcji analitycznej. Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym oraz $f : X \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *funkcją analityczną w punkcie* $x_0 \in X$, gdy f rozwija się w szereg potęgowy w otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że f jest *funkcją analityczną*, gdy f jest funkcją analityczną w każdym punkcie zbioru X.

Uwaga 8.6.9. *Wprost z definicji funkcji sinus i cosinus mamy,*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\sin x = \sin(x - x_0)\cos x_0 + \cos(x - x_0)\sin x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

gdzie $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos x_0}{(2n+1)!}$ oraz $a_{2n} = \frac{(-1)^n \sin x_0}{(2n)!}$ dla $n = 0, 1, \ldots$ Stąd wynika, że funkcja sinus jest analityczna. Analogicznie pokazujemy, że funkcja cosinus jest analityczna.

Uwaga 8.6.10. *Z twierdzenia 5.9.5 mamy $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy*

$$e^x = e^{x - x_0} e^{x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x - x_0)^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

W konsekwencji funkcja $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ jest analityczna.

Uwaga 8.6.11. *W uwagach 8.6.9 i 8.6.10 funkcje analityczne w $\mathbb{R}$ rozwijały się w szereg potęgowy zbieżny w całym zbiorze $\mathbb{R}$. Nie musi to zachodzić dla każdej funkcji analitycznej. Na przykład można sprawdzić, że funkcja $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, jest analityczna lecz jej rozwinięcie w otoczeniu punktu 0 jest postaci*

$$\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad x \in (-1, 1).$$

Promieniem zbieżności powyższego szeregu potęgowego jest 1, więc szereg ten nie jest zbieżny w całym zbiorze $\mathbb{R}$.

8.7 Rozwinięcie funkcji potęgowej w szereg potęgowy

Definicja ciągu reszt we wzorze Taylora. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ oraz $x_0 \in (a, b)$. Dla $n \in \mathbb{N}$, funkcję $R_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ taką, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \qquad \text{dla} \quad x \in (a, b) \tag{8.17}$$

nazywamy *n-tę resztą we wzorze Taylora*. Ciąg funkcyjny $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy *ciągiem reszt we wzorze Taylora*.

Uwaga 8.7.1. *Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ oraz $x_0 \in (a, b)$. Ze wzoru Taylora I, II, III (twierdzenia 7.5.4, 7.5.10, 7.5.11) mamy istnienie reszt R_n. Ponadto można przyjąć $R_n(x_0) = 0$ oraz dla $x \neq x_0$ reszta w postaci Lagrange'a ma postać*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n, \qquad \text{gdzie } c \text{ jest pewnym punktem leżącym między } x \text{ i } x_0,$$

reszta w postaci Cauchy'ego ma zaś postać

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(x-x_0)^n,$$ gdzie c jest pewnym punktem leżącym między x i x_0 oraz $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0}$,

Bezpośrednio z definicji (8.17) dostajemy

Twierdzenie 8.7.2. *Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞, $x_0 \in (a,b)$ oraz $(R_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem reszt we wzorze Taylora. Wówczas funkcja f rozwija się w otoczeniu $\Omega \subset (a,b)$ punktu x_0 w szereg potęgowy wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.*

Definicja . Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas przyjmujemy

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \quad \text{oraz} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Uwaga 8.7.3. *Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, symbol $\binom{\alpha}{n}$ jest naturalnym uogólnieniem symbolu Newtona.*

Naturalnym uogólnieniem wzoru dwumiennego Newtona jest następujące

Twierdzenie 8.7.4. *Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{dla} \quad x \in (-1,1). \tag{8.18}$$

Dowód. Niech $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1,1)$. Dla $x = 0$ równość (8.18) jest oczywista. Pokażemy (8.18) dla $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$.

Jeśli $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geqslant 0$, to teza wynika ze wzoru dwumiennego Newtona, gdyż wtedy $\binom{\alpha}{n} = 0$ dla $n > \alpha$. Załóżmy więc, że $\alpha \in \mathbb{R}$ nie jest liczbą całkowitę nieujemną. Wtedy $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ dla $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$.

Stosując kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów dostajemy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n$ jest zbieżny dla $x \in (-1,1)$. Zatem z warunku koniecznego zbieżności szeregów mamy

$$\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n = 0 \quad \text{dla} \quad x \in (-1,1). \tag{8.19}$$

Indukcyjnie pokazujemy, że dla $x \in (-1,1)$ mamy

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

więc na mocy wzoru Taylora III 7.5.11 dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x) \quad \text{dla} \quad x \in (-1,1) \setminus \{0\}, \tag{8.20}$$