

Szeregi Fouriera

Paweł STRZELECKI, Warszawa

Teoria szeregów Fouriera wyrosła z prób przedstawiania obiektów złożonych i skomplikowanych w postaci kombinacji obiektów bardzo prostych, modelowych, dobrze znanych. Ten bardzo stary pomysł – jakąś jego wersję widać przecież już w ptolemejskiej koncepcji składania wszelkich obserwowanych ruchów ciał niebieskich z krążenia po epicyklach – doprowadził do powstania przepięknej i rozległej gałęzi analizy matematycznej, którą (z pewnością nieudolnie) spróbujemy Czytelnikom pokazać, z konieczności poświęcając nieco uwagi szczegółom technicznym. Zanim jednak pojawi się pierwsze sakramentalne *niech f będzie...*, przedstawimy nieco bliżej postać człowieka, który całej teorii użył swego nazwiska.

Jean Baptiste Joseph Fourier

bez wątpienia żył w tzw. ciekawych czasach. Urodził się w pierwszy dzień wiosny 1768 roku, w niewielkim miasteczku Auxerre, zagubionym mniej więcej w połowie drogi między Paryżem a stolicą Burgundii, Dijon. Był dwunastym dzieckiem swego ojca, miejscowego mistrza krawieckiego. W wieku dziesięciu lat został sierotą, jednak dzięki temu, że już wówczas cieszył się sławą młodego geniusza, udało mu się zdobyć rzetelne wykształcenie: wspierany przez biskupa Auxerre i paru innych małomiasteczkowych notabli, ukończył najpierw szkołę parafialną, a w 1780 roku trafił do miejscowej *École Royale Militaire*. Błyszczał tam zarówno na lekcjach literatury, jak i matematyki; podobno zbierał za dnia ogarki świec, by nocą zakradać się do jednego ze szkolnych magazynków i spokojnie studiować tam kolejne tomy wykładów Bézouta. Jednak mimo wszystkich talentów młodego Fouriera, mimo ubieranych przezeń *prix d'excellence* i *prix de composition*, mimo wreszcie pozytywnej opinii i poparcia inspektorów *École* z Lagrange'em na czele, urzędnicy francuskiego Ministerstwa Wojny zdecydowali, że ktoś nieszlachetnie urodzony nie nadaje się na oficera artylerii ani korpusu inżynierskiego, „choćby nawet i był drugim Newtonem”. Dziewiętnastoletni Jean Baptiste postanowił wówczas szukać szczęścia za murami przepięknego skądinąd, utrzymanego w czystym stylu romańskim, benedyktyńskiego opactwa św. Benona znad Loary.

Spędzenia reszty życia w zakonnej sukni zaoszczędziła mu Wielka Rewolucja Francuska i dekret Zgromadzenia Narodowego, zabraniający na jakiś czas składania ślubów zakonnych. Fourier wrócił do Auxerre i uczył tam matematyki, a także był członkiem miejscowego komitetu rewolucyjnego (co nie uchroniło go od paru przygód zakończonych niedługim aresztem). W roku 1795 został na krótko jednym z (najzdolniejszych) uczniów świeżo powołanej *École Normale*, potem zaś związał się ze słynną *École Polytechnique*, gdzie szybko wyrobił sobie pozycję rzutkiego administratora i świetnego nauczyciela w jednej osobie. Zachowane notatki z jego ówczesnych wykładów wskazują podobno na elegancję i przejrzystość myśli, a także na żywe zainteresowanie historią omawianych zagadnień.

W roku 1797 Fourier przejął od Lagrange'a katedrę analizy matematycznej i mechaniki. Mimo to jednak jedynym śladem jego czysto naukowej działalności w latach 1795-98 jest niewielka praca opublikowana w zeszytach *École Polytechnique*.

W maju 1798 roku, z polecenia Dyrektoriatu i Ministerstwa Spraw Wewnętrznych, Fourier znalazł się na pokładzie jednego z okrętów napoleońskiej armady płynącej do Egiptu. W Afryce, pod piramidami i nie tylko, spędził kolejne cztery lata życia. Został m.in. sekretarzem Instytutu Egipskiego w Kairze. Wielu osobom znany jest właśnie jako egiptolog, a nie jako matematyk i fizyk.

O jego losach po powrocie do Francji w 1802 roku przesądził Napoleon, pisząc w liście do Bertholleta:

Obywatelu Senatorze,

ponieważ właśnie zmarł prefekt Departamentu Isère, chciałbym w dowód najszczerzego zaufania, jakie żywię do obywatela Fouriera, mianować go na to stanowisko. (...)

Decyzja okazała się trafna: obywatel Fourier jako prefekt doprowadził m.in. do osuszenia bagien w okolicy Grenoble i zwalczania corocznych epidemii malarii (pogodziwszy wcześniej, po niełatwych negocjacjach, sprzeczne interesy finansowe trzydziestu pięciu gmin) oraz do otwarcia francuskiej części nowej, transalpejskiej drogi z Grenoble do Turynu. Jako zręczny urzędnik i administrator, był prefektem zarówno w czasie pierwszej restauracji Bourbonów, jak i później, podczas stu dni Napoleona. Ten ostatni, w dowód uznania za długoletnią służbę, przyznał Fourierowi w czerwcu 1815 roku 6000 franków emerytury. W wyznaczonym dniu pierwszej płatności, 1 lipca 1815 roku, było już jednak po bitwie pod Waterloo.

Dzięki wsparciu swych byłych uczniów z École Polytechnique, Fourier znalazł schronienie na stanowisku dyrektora Biura Statystyki Departamentu Sekwany i zrezygnował z emigrowania do Anglii. W kwietniu 1817 roku, mimo początkowego sprzeciwu króla, został członkiem Akademii Nauk, a w roku 1823 – sekretarzem Akademii, pokonując w wyborach Biota wynikiem 38:10. To stanowisko piastował przez ostatnie siedem lat życia.

Stałe miejsce w Panteonie nauki – o które bardzo się martwił jako dwudziestojednoletni nowicjusz u św. Benona, wspominając w liście do swego przyjaciela i nauczyciela matematyki, Bonarda, że w tym wieku Newton i Pascal wielokrotnie już zasłużyli sobie na nieśmiertelność – zapewnił sobie Fourier jako autor *La Théorie Analytique de la Chaleur*, wydanej drukiem w roku 1822, lecz napisanej znacznie wcześniej, w większości w latach 1805–1807, gdy był prefektem w Grenoble. Jakim cudem znajdował czas na pracę naukową wśród rozlicznych obowiązków służbowych, pozostanie jego tajemnicą. Dzieło Fouriera budziło żywe reakcje większości dziewiętnastowiecznych przedstawicieli fizyki matematycznej – począwszy od ataków Poissona i Biota, do późniejszych zachwyty Jamesa Clerka Maxwella, który określał *La Théorie Analytique* jako *matematyczny poemat*. Zamiary i cele Fouriera najlepiej oddają jego własne słowa ze wstępu do książki:

... choć równania opisujące przepływ ciepła mają szczególnie prostą postać, to znane metody nie dostarczają żadnego ogólnego sposobu ich całkowania. Nie możemy zatem czerpać z nich wiadomości o temperaturze po upływie konkretnego czasu. Interpretacja liczbowa jest jednak niezbędna; jak długo jej nie mamy, rozwiązania są niepełne i bezużyteczne, a prawda, którą chcielibyśmy odkryć, nie gorzej i nie mniej jest ukryta w formułach analizy matematycznej, niż była w oryginalnym zagadnieniu fizycznym. Rozwiązaniem tej kwestii zajęliśmy się z wszelkim staraniem i byliśmy w stanie pokonać trudności we wszystkich rozpatrzonych zagadnieniach.

Najprostszemu z rozpatrzonych zagadnień spróbujmy przyjrzeć się nieco bliżej.

Model przepływu ciepła w jednorodnym pręcie

Wyidealizowany pręt to odcinek $I = [0, \pi]$; temperatura w punkcie $x \in I$ w chwili czasu $t \geq 0$ to wartość funkcji dwóch zmiennych $u(x, t)$. Zmiany temperatury – przy odpowiednim doborze jednostek – opisuje równanie

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad x \in (0, \pi), t > 0,$$

które uzupełniamy warunkami

$$(2) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Inaczej mówiąc, zakładamy, że znany jest początkowy rozkład temperatury, a końce pręta są cały czas wbite w lód i mają temperaturę równą zeru. Wypada jeszcze założyć, że $f(0) = f(\pi) = 0$.

Poszukajmy rozwiązań postaci $u(x, t) = v(x)\varphi(t)$. Dla takich funkcji u równanie (1) przybiera postać

$$\frac{\varphi_t}{\varphi} = \frac{v_{xx}}{v}.$$

Ponieważ lewa strona zależy tylko od t , a prawa – tylko od x , więc dla pewnej stałej λ mamy

$$\varphi_t = \lambda\varphi, \quad v_{xx} = \lambda v.$$

Zajmijmy się najpierw drugim równaniem. Dla dodatnich λ ma ono rozwiązania postaci $v(x) = C_1 \exp(x\sqrt{\lambda}) + C_2 \exp(-x\sqrt{\lambda})$. Żadne z nich nie spełnia warunku brzegowego $v(0) = v(\pi) = 0$, o ile nie znika tożsamościowo. Przypadek $\lambda = 0$ również jest nieciekawym, a dla $\lambda = -1$ mamy

$$v(x) = C_1 \cos(x\sqrt{|\lambda|}) + C_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|}).$$

Ponieważ $v(0) = 0$, więc $C_1 = 0$. Warunek $v(\pi) = 0$ prowadzi teraz do wniosku

$$\lambda = -n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ostatecznie mamy więc $v(x) = \text{const} \cdot \sin nx$, a $\varphi(t) = \text{const} \cdot \exp(-n^2 t)$. Równanie (1) jest liniowe, a zatem spełniać je będzie również dowolna kombinacja liniowa znalezionych rozwiązań,

$$(3) \quad u(x, t) = \sum_n b_n \exp(-n^2 t) \sin nx.$$

Dla $t = 0$ otrzymujemy $u(x, 0) = f(x) = \sum_n b_n \sin nx$. Jeśli więc umiemy przedstawić początkowy rozkład temperatury w postaci (być może nieskończonej) sumy sinusów, to rozwiązanie w jawnej postaci – z dokładnością do sprawdzenia, czy otrzymany szereg wolno różniczkować wyraz po wyrazie – otrzymujemy mechanicznie i za darmo; wystarczy dopisać czynniki $\exp(-n^2 t)$.

Wzór (3) pozwala też na jakościową analizę rozwiązania. Po pierwsze, jeśli współczynniki b_n są ograniczone (jak zobaczymy, jest tak już przy bardzo słabym założeniu o całkowalności funkcji f), to wówczas – z uwagi na obecność szybko gasnących czynników $\exp(-n^2 t)$ – suma szeregu (3) jest funkcją klasy C^∞ i pochodnych ma dużo więcej, niż potrzeba do wypisania równania (1). Po drugie, mamy oczywiście $u(x, t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow +\infty$. Zgadza się to z intuicją: jeśli końce ogrzanego pręta są wbite w lód, to pręt wystygnie – niezależnie od tego, jaki był początkowy rozkład temperatury. Po trzecie, dla $b_1 \neq 0$ mamy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{b_1 e^{-t} \sin x} = 1.$$

Zatem, dla dużych czasów t_0 , wykres temperatury $u(x, t_0)$ przypomina wykres funkcji $\sin x$ pomnożonej przez odpowiednią stałą: stygnący pręt jest najcieplejszy w okolicy środka, z dala od zimnych końców.

Podobne rozważania można przeprowadzić, biorąc na warsztat

Model drgającej struny

Tym razem $u(x, t)$ to wychylenie struny od położenia równowagi. Współrzędna x to odległość punktu spoczywającej struny od jednego z jej końców, $x \in [0, \pi]$, t zaś jak zwykle oznacza czas. Jeśli struna jest jednorodna, a drgania niewielkie, to prawo Hooke'a i druga zasada dynamiki pozwalają wyprowadzić równanie

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad x \in (0, \pi), t > 0,$$

gdzie c jest pewną stałą, zależną od przyjętego układu jednostek. W celu zagwarantowania jednoznaczności rozwiązania, należy równanie (4) uzupełnić dodatkowymi warunkami, zakładając np., że

$$(5) \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), & x \in [0, \pi]; \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi]; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Innymi słowy, znamy początkowe wychylenie struny; wiemy w dodatku, że puszczono ją swobodnie; końce struny są zamocowane i nie drgają.

Wspomnijmy, że Euler, badając wpływ wzajemnego przyciągania Jowisza i Saturna na kształt orbit tych planet, szacował wartość całki oznaczonej z funkcji $(1 - g \cos \omega)^{-\mu}$ dla $g \approx \frac{4}{5}$, wykorzystując właśnie szeregi trygonometryczne. Za tę pracę otrzymał zresztą w 1748 roku nagrodę Paryskiej Akademii Nauk.

Równanie struny umieli rozwiązywać d'Alembert, Euler i Daniel Bernoulli około dwa i pół wieku temu. Toczyli nawet przez parę lat spór, który z nich robi to najlepiej i w najbardziej ogólny sposób. Opisany wyżej pomysł poszukiwania rozwiązań postaci $u(x, t) = v(x)\varphi(t)$ prowadzi tym razem do wzoru

$$(6) \quad u(x, t) = \sum_n b_n \sin nx \cos cnt,$$

gdzie, jak poprzednio, współczynniki b_n należy dobrać tak, by mieć $f(x) = \sum_n b_n \sin nx$. Osoby, które nie boją się szkolnego wzoru $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, mogą zauważyć, że rozwiązanie $u(x, t)$ można równoważnie przedstawić w postaci

$$(7) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct)),$$

gdzie \tilde{f} jest nieparzystą funkcją 2π -okresową, pokrywającą się z f na przedziale $[0, \pi]$. Fala wzdłuż struny rozchodzi się więc ze skończoną prędkością c , a po dojściu do końca struny zmienia kierunek i wychylenie na przeciwne. Profil fali jest jednoznacznie określony przez początkowe wychylenie struny. Widać też, że – w przeciwieństwie do poprzedniego przykładu – rozwiązania wcale nie muszą być funkcjami gładkimi (są na tyle gładkie, na ile pozwala na to funkcja f).

Oba przykłady podają gotowe przepisy na błyskawiczne rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych fizyki matematycznej. (Okazuje się zresztą, że sam przepis, nazywany czasem *metodą Fouriera rozdzielania zmiennych*, jest dość uniwersalny: znajomość funkcji własnych operatorów różniczkowych eliptycznych, odpowiadających zagadnieniom stacjonarnym, np. operatora Laplace'a, pozwala wypisywać jawne formuły na rozwiązania zagadnień ewolucyjnych, zależnych od czasu. Jest tak np. w przypadku równania Schrödingera czy słynnych skądinąd rozważań Marka Kaca na temat tego, czy można usłyszeć kształt bębna.) Pozostaje rozstrzygnąć, czy dla danej funkcji $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ można znaleźć rozkład postaci $f(x) = \sum_n b_n \sin nx$? Jak to zrobić? Jak należy rozumieć równość, tzn. jaki jest charakter zbieżności szeregu? Z prób odpowiedzi na te pytania wyrasta teoria szeregów Fouriera.

Najprościej jest odpowiedzieć na drugie z powyższych pytań. Jeśli funkcja 2π -okresowa f jest sumą zbieżnego jednostajnie szeregu sinusów i cosinusów,

$$(8) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

to mnożąc obie strony równości przez $\sin mx$ i całkując otrzymany szereg wyraz po wyrazie, dostaniemy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) \, dx = \\ &= b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi b_m. \end{aligned}$$

Współczynnik a_m znajdziemy, biorąc $\cos mx$ zamiast $\sin mx$ i powtarzając cały zabieg. Ostatecznie więc

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx,$$

a dla dodatnich m jest:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

Zauważmy jeszcze dla uzupełnienia poprzednich rozważań, że gdy funkcję określoną na przedziale $[0, \pi]$ przedłużymy do 2π -okresowej funkcji *nieparzystej*,

Wykorzystane obok równości

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= \pi \delta_{nm}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx &= 0, \end{aligned}$$

łatwo jest sprawdzić, posługując się szkolnymi wzorami na iloczyny sinusów i cosinusów.

to będziemy mieć $a_m \equiv 0$ i w równości (8) pojawią się po prawej stronie same sinusy.

Szeregi Fouriera funkcji całkowalnych

Wypisane wyżej wzory na współczynniki a_m i b_m mają sens, gdy f jest po prostu funkcją całkowaną. Popatrzmy przez chwilę na ten przypadek.

Przestrzeń wszystkich funkcji całkowalnych na odcinku $[-\pi, \pi]$ względem miary Lebesgue'a oznaczmy tradycyjnie przez L^1 . Jest to przestrzeń Banacha z normą

$$\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$$

(ściśle mówiąc, należałoby tu mówić o klasach abstrakcji i utożsamiać funkcje równe poza zbiorem miary zero – nie będziemy się tym przejmować). Wygodnie będzie przejść do zapisu zespolonego: powiemy, że n -ty współczynnik Fouriera funkcji $f \in L^1$ to liczba

$$(9) \quad \hat{f}(n) \equiv c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dla dodatnich n mamy, jak łatwo sprawdzić, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ oraz $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. Ponadto, $c_0 = a_0/2$. Szereg Fouriera funkcji f to szereg

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp(inx);$$

jego N -ta suma częściowa w punkcie x to (wbrew nazwie) suma $(2N + 1)$ składników:

$$s_N f(x) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) \exp(inx).$$

Zanotujmy na początek kilka prostych własności współczynników Fouriera.

1. Przekształcenie $f \mapsto (\hat{f}(n))$ jest liniowe.
2. Jeśli $f \in L^1$, to wówczas

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}.$$

3. Jeśli f jest absolutnie ciągła (tzn. pochodna $f'(x)$ istnieje dla prawie wszystkich x , jest funkcją całkowaną, i mamy $f(x) = \text{const} + \int_{-\pi}^x Df(t) dt$), to

$$\hat{f}'(n) = in \cdot \hat{f}(n).$$

Można się o tym przekonać, całkując we wzorze (9) przez części. Dzięki całkowalności f' i własności 2 mamy wówczas $|\hat{f}'(n)| = O(1/n)$.

Podobnie, dla funkcji, których pochodna jest absolutnie ciągła (w szczególności np. dla funkcji klasy C^2), mamy oszacowanie $|\hat{f}'(n)| = O(1/n^2)$. Szereg Fouriera takiej funkcji jest więc zbieżny bezwzględnie i jednostajnie, bowiem majoryzuje się przez zbieżny szereg liczbowy $\text{const} \cdot \sum n^{-2}$.

4. (Lemat Riemanna–Lebesgue'a). Jeśli $f \in L^1$, to $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ dla $|n| \rightarrow \infty$.

Dla dowodu zauważamy, że zbiór wszystkich funkcji z przestrzeni L^1 , dla których zachodzi teza lematu,

- (i) jest domkniętą podprzestrzenią liniową L^1 ;
- (ii) dla dowolnego odcinka $(a, b) \subset (-\pi, \pi)$ zawiera jego funkcję charakterystyczną $\chi_{(a,b)}$.

Te spostrzeżenia kończą dowód, bowiem skończone kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych odcinków – tzw. funkcje proste – są gęste w przestrzeni L^1 .

5. (Jednoznaczność). Jeśli dla pewnej funkcji całkowanej f mamy $\hat{f}(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$, to wtedy $f(x) = 0$ dla p. w. $x \in (0, \pi)$.

Niestety, gdy f jest po prostu funkcją całkowalną, równość (8) na ogół nie zachodzi. Co gorsza, ciąg sum częściowych $s_n f(x)$ może zachowywać się dość dziko: Kołmogorow w roku 1926 wskazał funkcję $f \in L^1$, której szereg Fouriera jest rozbieżny wszędzie, a dokładniej,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |s_N f(x)| = \infty \quad \text{dla wszystkich punktów } x \in (-\pi, \pi).$$

Sytuacja znacznie się uporządkuje, gdy do rozważań dopuścimy – zamiast szeregów Fouriera wszystkich funkcji całkowalnych – jedynie

Szeregi Fouriera funkcji całkowalnych z kwadratem

Przestrzeń L^2 wszystkich funkcji całkowalnych z kwadratem na odcinku $[-\pi, \pi]$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

i wyznaczoną przez normą $\|f\| \equiv \|f\|_{L^2} = \langle f, f \rangle^{1/2}$. Funkcje $e_n(x) = \exp(inx)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) tworzą w L^2 układ ortonormalny, tzn.

$$(10) \quad \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm} \quad \text{dla } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Jest to w dodatku układ ortonormalny *zupełny*, tzn. dla dowolnej funkcji $f \in L^2$ mamy

$$(11) \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Wyrażenie po prawej stronie to szereg Fouriera funkcji f , zapisany w nowych oznaczeniach. Równość oznacza, że szereg jest zbieżny do f w topologii przestrzeni L^2 . Zwróćmy uwagę na silną analogię z sytuacją skończonej wymiarową: mamy przestrzeń z iloczynem skalarnym, w niej pewną bazę złożoną z wektorów parami prostopadłych; dowolny wektor możemy przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy. Współczynniki rozwinięcia to iloczyny skalarne z wektorami bazy.

Równość (11) wynika z elementarnej teorii przestrzeni Hilberta. Dla tych, którzy nie zdążyli jeszcze jej poznać, albo zdążyli już o niej zapomnieć, szkicujemy niżej drogę na skróty.

Oznaczmy przez T_N zbiór wszystkich wielomianów trygonometrycznych stopnia N , tj. funkcji postaci

$$(12) \quad t = \sum_{n=-N}^N \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

T_N jest oczywiście podprzestrzenią liniową L^2 .

Lemat. N -ta suma częściowa $s_N f$ szeregu Fouriera funkcji $f \in L^2$ jest rzutem ortogonalnym f na przestrzeń T_N , tzn. jeśli $t \in T_N$ i $t \neq s_N f$, to wówczas

$$\|f - t\| > \|f - s_N f\|.$$

Inaczej mówiąc, wśród przybliżeń funkcji f wielomianami trygonometrycznymi stopnia N istnieje – w topologii przestrzeni L^2 – najlepsze i jest nim właśnie N -ta suma częściowa szeregu Fouriera.

Dowód. Wykorzystując warunki ortonormalności (10), sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że dla $t = \sum_{n=-N}^N \alpha_n e_n$ zachodzi równość

$$(13) \quad \|f - t\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=-N}^N |\alpha_n - \hat{f}(n)|^2.$$

Wyrażenie po prawej stronie osiąga minimum, gdy $\alpha_n = \hat{f}(n)$ dla wszystkich n spełniających nierówność $|n| \leq N$, czyli dla $t = s_N f$. \square

Wniosek. Dla $f \in L^2$ mamy:

$$(14) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N f\|_{L^2} = 0,$$

$$(15) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Idea dowodu. Przez $\sigma_N f$ oznaczmy średnią arytmetyczną początkowych wyrazów ciągu $s_N f$, tzn. $\sigma_N f = (s_0 f + s_1 f + \dots + s_N f)/(N+1)$. Ponieważ $\sigma_N f \in T_N$, więc z Lematu wnioskujemy, że

$$\|f - s_N f\| \leq \|f - \sigma_N f\|.$$

By udowodnić równość (13), wystarczy więc pokazać, że $\sigma_N f \rightarrow f$ w L^2 . Wszystkich szczegółów dowodu przeprowadzonego po raz pierwszy przez Fejera w 1904 roku nie będziemy tu przytaczać. Kto chce, może sprawdzić, że

$$\sigma_N f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) f(y-x) dx,$$

gdzie F_N jest tzw. *jądrem Fejera*. Umiejętność dwukrotnego sumowania ciągu geometrycznego pozwala wypisać F_N w jawnej postaci; można się wtedy bez kłopotu przekonać, że

$$F_N \geq 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = 1,$$

$$\sup_{|t| \geq \delta} F_N(t) \leq \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \quad \text{dla wszystkich } \delta > 0.$$

Te warunki oznaczają, że rodzina funkcji $(F_N)_{N \geq 1}$ jest tzw. *aproksymatywną jedynką*, czyli, jak powiedziałby fizyk, przybliżeniem delty Diraca. (Warto zauważyć, że podobne trzy warunki nie są spełnione, gdy rozważamy sumy częściowe $s_N f$ – wyrażają się one przez splot z tzw. jądrem Dirichleta, które nie ma ustalonego znaku.)

Standartowe rozumowanie, wykorzystujące nierówność Holdera i twierdzenie Fubiniego, pozwala teraz udowodnić znacznie więcej, niż potrzebujemy do zakończenia dowodu wniosku, a mianowicie:

- (i) jeśli $f \in L^p$ dla pewnego $p \in [1, \infty)$, to wtedy $\sigma_N f \rightarrow f$ w topologii L^p ;
- (ii) jeśli funkcja f jest ciągła na odcinku $[-\pi, \pi]$, to wtedy ciąg $\sigma_N f$ zbiega do f jednostajnie.

Zatem istotnie sumy częściowe szeregu Fouriera funkcji $f \in L^2$ zbiegają do f w topologii L^2 .

Druga część wniosku to tzw. tożsamość Parsewala. Wynika ona ze wspomnianej już równości

$$\|f - s_N f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2$$

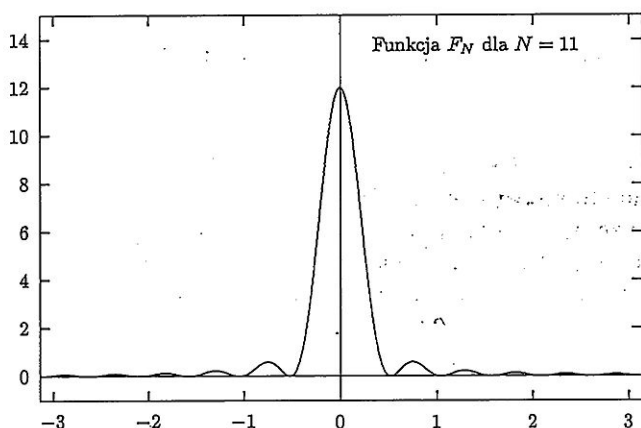
oraz pierwszej części wniosku. □

Okazuje się, że zachodzi też twierdzenie w pewnym sensie odwrotne do powyższego wniosku. Mianowicie, dla dowolnego ciągu liczb zespolonych $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sumowalnego z kwadratem, tzn. takiego, że

$$(16) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty,$$

istnieje dokładnie jedna funkcja $f \in L^2$, dla której mamy $\hat{f}(n) = a_n$ dla wszystkich n całkowitych. Jest to tzw. *twierdzenie Riesz–Fischera*. Dowód jest prosty: z warunku (16) wynika, że ciąg $\sum_{n=-N}^N a_n e_n$ spełnia warunek Cauchy’ego w (zupełnej!) przestrzeni L^2 ; jego granica ma żądaną własność.

Twierdzenia Riesz–Fischera nie można w żaden sposób poprawić. Jeśli suma liczb $|a_n|^2$ jest nieskończona, to w szeregu $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n$ można tak podostawiać



znaki \pm do poszczególnych wyrazów, że otrzymany szereg nie będzie szeregiem Fouriera żadnej funkcji całkowalnej z kwadratem, a nawet żadnej funkcji całkowalnej. W dodatku, będzie tak w pewnym sensie dla *większości* sposobów rozstawienia znaków.

Wiemy już, że sumy częściowe szeregu Fouriera funkcji f całkowalnej z kwadratem zbiegają do tej funkcji w L^2 , a zatem pewien podciąg sum częściowych zbiega do f prawie wszędzie. Można postawić naturalne pytanie: czy dla $f \in L^2$ ciąg $s_N f$ zbiega do f prawie wszędzie? W 1915 roku, w swojej pracy doktorskiej, Łuzin postawił hipotezę, że odpowiedź na powyższe pytanie jest twierdząca. Problem czekał na rozstrzygnięcie pół wieku: dopiero w roku 1966 szwedzki matematyk Lenart Carleson udowodnił w pracy opublikowanej niebyle gdzie, bo w *Acta Mathematica*, że hipoteza Łuzina jest prawdziwa.

Ambitni Czytelnicy o zacięciu analitycznym mogą w charakterze ćwiczenia udowodnić rezultat nieco słabszy od wyniku Carlesona, uzyskany przez Kołmogorowa w roku 1925: jeśli (N_k) jest takim ciągiem liczb naturalnych, że $\inf_k N_{k+1}/N_k \equiv q > 1$, to wówczas dla każdej $f \in L^2$ ciąg $s_{N_k} f$ zbiega do f prawie wszędzie. Wskazówka: należy wykorzystać tożsamość Parsewala. Gdy się uda, można spróbować wykorzystać tożsamość Parsewala do udowodnienia, że wśród wszystkich gładkich, zamkniętych krzywych płaskich o długości 2π to właśnie okrąg ogranicza obszar o największym polu. Wskazówka: wyrazić długość krzywej przez całkę i zastosować twierdzenie Stokesa.

Widać z tego wszystkiego, że o zbieżności szeregu Fouriera funkcji całkowalnej z kwadratem można powiedzieć zaskakująco dużo. Można by się spodziewać, że dla funkcji ciągłych będzie jeszcze lepiej. Tymczasem, czekają nas

Przykre niespodzianki

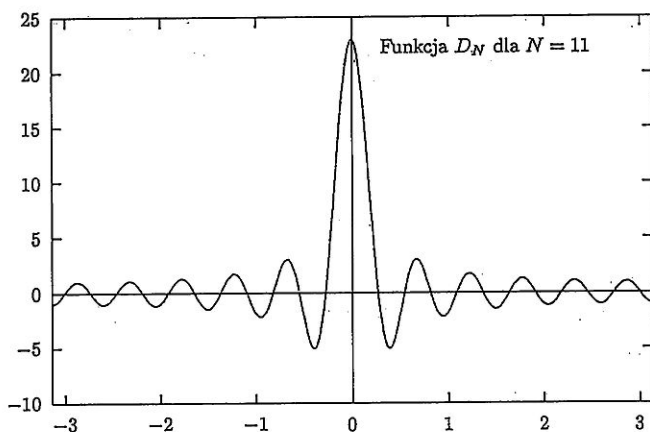
Pierwszy przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera jest rozbieżny w pewnych punktach, podał w roku 1876 du Bois Reymond, rozumując w sposób odmienny od opisanego niżej.

Okazuje się mianowicie, że szereg Fouriera funkcji ciągłej może być rozbieżny w nieprzeliczalnie wielu punktach, tworzących gęsty podzbiór odcinka $[-\pi, \pi]$ (na mocy wspomnianego wyżej twierdzenia Carlesona, ów podzbiór ma miarę zero). W dodatku jest tak dla *większości* funkcji ciągłych. Szkic dowodu tego zaskakującego faktu rozpoczniemy od wypisania jawnego wzoru na sumę częściową $s_N f$. Posługując się definicją współczynników Fouriera i wzorem na sumę postępu geometrycznego, dostaniemy

$$\begin{aligned} s_N f(x) &= \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x-t)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt, \end{aligned}$$

gdzie

$$D_N(s) := \sum_{n=-N}^N e^{ins} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{1}{2}s}$$



to tzw. *jądro Dirichleta* (jak widać, w przeciwieństwie do jądra Fejera nie jest to funkcja nieujemna).

Położmy teraz $x = 0$. Ponieważ jądro Dirichleta jest funkcją parzystą, więc

$$(17) \quad s_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t) dt.$$

Ten wzór określa przekształcenie liniowe ciągłe (ściślej: funkcjonal liniowy ciągły) na przestrzeni C wszystkich funkcji ciągłych na odcinku $[-\pi, \pi]$ (z topologią zbieżności jednostajnej, wyznaczoną przez normę supremum):

$$C \ni f \mapsto L_N(f) := s_N f(0) \in C.$$

Oszacujemy normę funkcjonału L_N . Przypomnijmy najpierw, że zgodnie z definicją

$$\|L_N\| := \sup_{\|f\| \leq 1} |L_N(f)|.$$

(Funkcjonał liniowy przekształca kulę jednostkową w przestrzeni C w pewną elipsę na płaszczyźnie zespolonej; jego norma to dłuższa półoś tej elipsy.)

Lemat. *Istnieje taka stała $C > 0$, że $\|L_N\| \geq C \log N$ dla wszystkich N .*

Dowód. Po chwili zastanowienia dochodzimy do wniosku, że gdy $|f(x)| \leq 1$ dla wszystkich x , to moduł liczby $L_N(f) = s_N f(0)$ jest największy, gdy $f \equiv +1$ na zbiorze $\{D_N > 0\}$ i $f \equiv -1$ na zbiorze $\{D_N < 0\}$. Taka funkcja f ciągła niestety nie jest, ale bez kłopotu możemy ją aproksymować funkcjami ciągłymi, dowolnie mało zaburzając całkę $L_N(f)$. Zatem

$$\|L_N\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt.$$

Teraz trzeba już tylko wykonać prosty rachunek, w którym wykorzystuje się po kolei: parzystość D_N ; nierówność $\sin \alpha < \alpha$ dla $\alpha > 0$ i liniową zamianę zmiennych $(N + \frac{1}{2})t \mapsto x$; wiedzę o zachowaniu sum częściowych szeregu harmonicznego. Oto szczegóły dla leniwych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})t|}{(N + \frac{1}{2})t} \frac{(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt = \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(N + \frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \approx \frac{4}{\pi^2} \log N. \quad \square \end{aligned}$$

Żeby zastosować lemat, przypomnijmy klasyczny rezultat analizy funkcjonalnej, jeden z wniosków z twierdzenia Baire'a – *twierdzenie Banacha–Steinhaus*. Otóż, jeśli dana jest dowolna rodzina przekształceń liniowych ciągłych $(L_a)_{a \in A}$ pewnej przestrzeni Banacha X w inną przestrzeń Banacha Y , to zachodzi wówczas jeden z dwóch warunków:

- (i) istnieje taka stała M , że $\|L_a\| \leq M$ dla wszystkich $a \in A$;
- (ii) w przestrzeni X istnieje gęsty, typu G_δ , podzbiór V o tej własności, że dla każdego wektora $f \in V$ mamy

$$\sup_{a \in A} \|L_a(f)\| = \infty.$$

Innymi słowy, jeśli normy przekształceń liniowych ciągłych L_a nie są wspólnie ograniczone, to przekształcenia L_a mogą bardzo mocno rozciągać wszystkie wektory z bardzo dużego zbioru.

Biorąc za X przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku, a za Y – liczby zespolone, zastosujemy twierdzenie Banacha–Steinhaus do rodziny funkcjonałów L_N . Z lematu wynika, że nie zachodzi warunek (i), bowiem $\|L_N\| \rightarrow \infty$ dla $N \rightarrow \infty$. Zachodzi więc warunek (ii): istnieje w przestrzeni funkcji ciągłych podzbiór V_0 , który jest gęsty, typu G_δ , i ma tę własność, że jeśli $f \in V_0$, to wówczas

$$\sup_N |L_N(f)| \equiv \sup_N |s_N f(0)| = +\infty.$$

A zatem szereg Fouriera każdej funkcji $f \in V_0$ jest rozbieżny w zerze.

Oczywiście w powyższym rozumowaniu nie odgrywał żadnej roli fakt, że sumy częściowe szeregu Fouriera badaliśmy akurat w zerze. Dla każdego punktu $q \in [-\pi, \pi]$ możemy w podobny sposób skonstruować taki (gęsty, typu G_δ) podzbiór V_q przestrzeni funkcji ciągłych, że jeśli $f \in V_q$, to szereg Fouriera f jest rozbieżny w punkcie q . Zbiór

$$V := \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap [-\pi, \pi]} V_q$$

nadal jest podzbiorem gęstym typu G_δ przestrzeni C ; jeśli $f \in V$, to szereg Fouriera f jest rozbieżny we wszystkich punktach wymiernych. Zauważmy wreszcie, że dla każdej takiej funkcji zbiór

$$\begin{aligned} Z_f &= \{x: \sup_N |s_N f(x)| = \infty\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x: \sup_N |s_N f(x)| > j\} = \\ &= \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \{x: |s_N f(x)| > j\} \right) \end{aligned}$$

jest nieprzeliczalny: jest bowiem, jak widać, typu G_δ , a ponadto jest gęsty na odcinku $[-\pi, \pi]$, bo zawiera wszystkie liczby wymierne z tego odcinka.

Stosując zamiast twierdzenia Banacha–Steinhaus’a inny rezultat klasycznej analizy funkcjonalnej, twierdzenie o operatorze otwartym, można z przytoczonej wyżej nierówności $\|D_N\|_{L^1} \geq C \log N$ dość łatwo wywnioskować, że nie każdy ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zbieżny „w obie strony” do zera jest ciągiem współczynników Fouriera funkcji całkownej (konkretny przykład takiego ciągu zobaczymy niżej).

Podany wyżej przykład nie oznacza oczywiście, że o szeregach Fouriera funkcji ciągłych nie można powiedzieć nic ponad to, co wiemy o szeregach Fouriera funkcji całkownych z kwadratem. Wypada po prostu poczynić jakies dodatkowe skromne założenia. Z całej masy rozmaitych kryteriów zbieżności przytoczymy dla porządku jedno

Twierdzenie (kryterium Jordana). *Jeśli funkcja ciągła f ma wahanie skończone, to wówczas szereg Fouriera f zbiega do f jednostajnie na przedziale $[-\pi, \pi]$.*

Wiedzę o tym, że szereg Fouriera w miarę przyzwoitej funkcji ciągłej jest do tej funkcji zbieżny, można wykorzystać w wielu sytuacjach do znalezienia sum różnych szeregów liczbowych, które – choć na pierwszy rzut oka nie zawsze to widać – są szeregami uzyskanymi z rozwinięć fourierowskich przez podstawienie konkretnej wartości x . Można np. znając rozwinięcie funkcji $f(x) = |x|$ w szereg Fouriera odgadnąć (podstawiając odpowiednią wartość x), że suma odwrotności kwadratów wszystkich liczb naturalnych jest równa $\pi^2/6$. Przyjemność uzupełnienia szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi. Kto robi to samodzielnie, odgadnie również bez kłopotu, jaką funkcję należy rozwinąć w szereg Fouriera, żeby dla zadanej liczby naturalnej k obliczyć sumę $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2k}$.

Z kryterium Jordana wynika również, że jeśli funkcja f jest całkowna, to wtedy szereg

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}(n)}{n} e^{inx}$$

jest zbieżny jednostajnie. Jest to bowiem szereg Fouriera funkcji $g(x) = \int_0^x f(t) dt - \hat{f}(0) \cdot x$ (z grubsza funkcji pierwotnej f , z dokładnością do kosmetycznej, liniowej poprawki, dokonanej z uwagi na brak w rozpatrywanym szeregu zerowego wyrazu). Funkcja $g(x)$ oczywiście ma wahanie skończone i jest ciągła. Stąd z kolei wynika, że szereg

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\log n}$$

nie jest szeregiem Fouriera żadnej funkcji całkownej (proszę sprawdzić, jak wyglądałby wyraz $\hat{f}(n)/n$. Pikanterii całej sprawie dodaje fakt, że szereg

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\cos nx}{\log n}$$

jest szeregiem Fouriera pewnej funkcji całkownej. Tego jednak dowodzić już nie będziemy.

Wady szeregów Fouriera

Powiedzieliśmy na wstępie, że teoria szeregów Fouriera wyrasta z prób przedstawiania złożonych funkcji (okresowych) w postaci sum sinusów i cosinusów. Ten zabieg ma liczne zalety, choćby i te, które widzieliśmy przy okazji rozwiązywania równań fizyki matematycznej, ma jednak i wady.

Lokalne własności funkcji tłumaczą się w pewnym sensie na globalne własności jej szeregu Fouriera. Funkcja gładka o nośniku zawartym w przedziale $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ ma szereg Fouriera złożony z nieskończenie wielu składników: suma skończenie wielu sinusów i cosinusów o różnych częstościach nie znika przecież tożsamościowo. Podobnie, nieciągłość funkcji powoduje, że jej szereg Fouriera musi zawierać nieskończenie wiele składników. Wnioskowanie w drugą stronę jest na ogół zadaniem bardzo trudnym, a o dokładnym umiejscowieniu nieciągłości nie ma co marzyć. Kodowanie okresowego sygnału w postaci szeregu Fouriera, choć w swoim czasie umożliwiło np. obniżenie cen rozmów telefonicznych między wschodnim a zachodnim wybrzeżem USA, jest więc po pierwsze nieoszczędne, po drugie mocno narażone na zaburzenia i przekłamania: proszę pomyśleć o tym, że zaburzenie nagrywania godzinnego koncertu, które pojawia się w ostatniej minucie, zniekształca *cały* szereg Fouriera. Mówiąc inaczej, szereg Fouriera sygnału dźwiękowego zawiera wprawdzie pełną informację o częstościach dźwięków składających się na ów sygnał, ale jest to informacja starannie ukrywająca zależność częstości całego sygnału od czasu.

Z prób radzenia sobie z ową niedoskonałością szeregów Fouriera wyrosła m.in. teoria falek, która nadal pozwala kodować zawiły sygnał w postaci sumy wielu sygnałów prostych, a przy okazji odnajduje ów utracony w wypadku szeregów Fouriera czas. Funkcję ψ nazywa się falką, jeśli uzyskane z niej przez skalowanie i przesunięcie funkcje $2^{-n/2}\psi(2^n x + k)$, gdzie n i k są całkowite, stanowią bazę przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$. Jak w 1987 roku udowodniła Ingrid Daubechies, istnieją matki-falki o zwartym nośniku. „Falkowy” szereg funkcji nieporównanie lepiej od szeregu Fouriera odzwierciedla np. jej nieciągłość, czy gwałtowną zmianę wartości na małym przedziale, a różne sygnały można z pomocą falek kodować, kompresować i czyścić z szumów dużo oszczędniej, biorąc znacznie mniej wyrazów odpowiedniego szeregu. W dodatku, odrzucenie dalekich wyrazów szeregu falkowego powoduje – inaczej, niż w przypadku klasycznych szeregów Fouriera – jedynie zatarcie drobnych detali zakodowanego sygnału, nie zniekształcając jego grubszych charakterystycznych cech. Te miłe własności powodują, że liczba spektakularnych zastosowań falek jest bardzo długa.

Na zakończenie

tego eklektycznego tekstu wypada stwierdzić, że teoria szeregów Fouriera, której usiłowaliśmy się przez dziurkę od klucza przyjrzeć (oglądanie przez dziurkę od klucza daje często obraz niepełny i nieprawdziwy, ale to już inna sprawa), stanowi znakomity przykład jedności różnych gałęzi matematyki. Wyrosła bowiem z zagadnień fizyki matematycznej, następnie – doprowadzając m.in. do narodzin analizy harmonicznej – dała chleb i pracę paru generacjom analityków dziewiętnastego i dwudziestego wieku (niektórym daje po dziś dzień), od lat dostarcza skutecznych narzędzi teorii równań różniczkowych cząstkowych i analizie numerycznej, ułatwia prowadzenie najróżniejszych obliczeń, trafiła do teorii liczb, dostarcza wreszcie argumentów każdemu, kto zechce dowodzić niestosowności apriorycznego podziału matematyki na czystą i stosowaną.

Nie koniec na tym: Georg Cantor przystąpił do tworzenia teorii mnogości po kilku latach pracy nad zagadnieniami zbieżności szeregów trygonometrycznych, gdy nie znajdował języka i aparatu koniecznego do wyrażenia różnych subtelności. Zatem, w pewnym sensie także pomysłowi Fouriera i jego poprzedników, by funkcje okresowe przedstawiać jako nieskończone sumy sinusów i cosinusów, zawdzięczamy powstanie uniwersalnego języka, w którym dziś – często bez należytego zastanowienia – z taką wygodą formułujemy nasze myśli i twierdzenia, niezależnie od tego, czy przyszło nam zajmować się analizą, algebrą, geometrią, topologią, czy jakąkolwiek inną dziedziną matematyki.