# Równania II rzędu

## Spis treści

# 1 Równania rzędu drugiego

## 1.1 Klasyfikacja i postać kanoniczna równań rzędu drugiego

**Zadanie 1.1.**

*Określić typy poniższych równań.*

a)$yu_{xx} - u_{yy} = 0.$

Równanie to można sklasyfikować dwiema metodami: za pomocą wyróżnika części głównej lub wartości własnych macierzy $A$ o elementach będących współczynnikami części głównej. Zauważmy najpierw, że równanie to składa się tylko z części głównej. Określmy macierz

$$\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\det(A - \lambda I) = (y - \lambda)(-1 - \lambda)$. Zatem wartościami własnymi są $\lambda_1 = y$ i $\lambda_2 = -1$. Wynika stąd, że równanie jest hiperboliczne, gdy $y > 0$, eliptyczne dla $y < 0$ i paraboliczne dla $y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Gdybyśmy policzyli natomiast wyróżnik części głównej: $b^2 - ac$, to otrzymamy $\Delta = 0^2 - y(-1) = y$. Widać więc, że znak $\Delta$ zależy tylko od $y$ i otrzymujemy ten sam wynik.

b)$4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$

Zauważmy, że część główna, to $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz}$, więc macierz $A$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Wartościami własnymi są rozwiązania równania $\det(A - \lambda I) = 0$, czyli

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 5 \\ 3 & 2-\lambda & 2 \\ 5 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda(66-\lambda^2)=0,$$

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\sqrt{66},\quad \lambda_3=-\sqrt{66}.$$

Równanie to jest więc niesklasyfikowane.

**Zadanie 1.2.**
*Sprowadzić poniższe równanie do postaci kanonicznej:*

$$u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0.$$

Łatwo zauważamy, że wyróżnik części głównej $\Delta=2^2-1\cdot 5=-1$, więc równanie jest eliptyczne. Równanie charakterystyk

$$F_x^2+2F_xF_y+5F_y^2=0$$

nie posiada rozwiązań w dziedzinie rzeczywistej, bo $\Delta=-16F_y^2$, ale możemy je rozwiązać w dziedzinie zespolonej. Wtedy funkcja $F$ spełniająca

$$F_x=\frac{-2F_y\pm 4F_y\sqrt{i^2}}{2}=(-1\pm 2i)F_y$$

jest funkcją zespoloną $F=\phi+i\psi$, gdzie $\phi$ i $\psi$ są już rzeczywiste. Dostajemy więc równanie

$$F_x+(1-2i)F_y=0,$$

dla którego szukamy zespolonej całki pierwszej układu:

$$\begin{cases} x' &= 1,\\ y' &= 1-2i.\end{cases}$$

Jest nią $F(x,y)=(-1+2i)x+y$, czyli $\phi(x,y)=-x+y,\ \ \psi(x,y)=2x$. Stosujemy więc zamianę zmiennych:

$$\xi=\phi(x,y)=-x+y,\quad \eta=\psi(x,y)=2x.$$

Stąd mamy kolejno

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi\xi_x+v_\eta\eta_x=v_\xi\cdot(-1)+v_\eta\cdot 2=2v_\eta-v_\xi,\\
u_y &= v_\xi\xi_y+v_\eta\eta_y=v_\xi\cdot 1+v_\eta\cdot 0=v_\xi,\\
u_{xx} &= 2v_{\eta\xi}\xi_x+2v_{\eta\eta}\eta_x-v_{\xi\xi}\xi_x-v_{\xi\eta}\eta_x=\\
&= 2v_{\eta\xi}\cdot(-1)+2v_{\eta\eta}\cdot 2-v_{\xi\xi}\cdot(-1)-v_{\xi\eta}\cdot 2=4v_{\eta\eta}+v_{\xi\xi}-4v_{\xi\eta},\\
u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x+v_{\xi\eta}\eta_x=v_{\xi\xi}\cdot(-1)+v_{\xi\eta}\cdot 2=2v_{\xi\eta}-v_{\xi\xi},\\
u_{yy} &= v_{\xi\xi}\xi_y+v_{\xi\eta}\eta_y=v_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

Po wstawieniu do równania dostajemy:

$$4v_{\eta\eta} + v_{\xi\xi} - 4v_{\xi\eta} + 2(2v_{\xi\eta} - v_{\xi\xi}) + 5v_{\xi\xi} - 32u = 0,$$

$$4v_{\xi\xi} + 4v_{\eta\eta} - 32u = 0,$$

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 8v = 0$$

i jest to szukana postać kanoniczna.

**Zadanie 1.3.**

*Znaleźć najprostszą postać kanoniczną dla równania:*

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$$

Ponieważ $\Delta = 0$, więc równanie jest w całej płaszczyźnie paraboliczne. Równaniem charakterystyk jest

$$F_x^2 - 2F_xF_y + F_y^2 = 0,$$

$$(F_x - F_y)^2 = 0,$$

$$F_x - F_y = 0.$$

Znajdziemy całkę pierwszą układu:

$$\begin{cases} x' &= 1, \\ y' &= -1. \end{cases}$$

Jest nią $\phi(x, y) = x + y$. Możemy teraz zastosować zamianę zmiennych

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

gdzie $\psi$ jest dowolną funkcją klasy $C^2$ o własności:

$$\det \begin{bmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{bmatrix} \neq 0.$$

Możemy więc wziąć funkcję $\psi(x, y) = x$. Wtedy rzeczywiście

$$\det \begin{bmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Zatem stosujemy zamianę zmiennych: $\xi = x + y$, $\eta = x$. W nowych zmiennych mamy

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\eta + v_\xi,\\
u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi,\\
u_{xx} &= 2v_{\eta\xi}\xi_x + 2v_{\eta\eta}\eta_x - v_{\xi\xi}\xi_x - v_{\xi\eta}\eta_x = v_{\eta\eta} + v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta},\\
u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x = v_{\xi\eta} + v_{\xi\xi},\\
u_{yy} &= v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\xi\eta}\eta_y = v_{\xi\xi},
\end{aligned}$$

więc równanie przyjmuje postać:

$$v_{\eta\eta} + 18v_\xi + 9v_\eta - 9v = 0. \tag{1}$$

Jest to oczywiście postać kanoniczna, ale czasami można jeszcze wprowadzić nową zamianę zmiennych, aby jeszcze bardziej tę postać uprościć. Funkcja $v$ przyjąć może wtedy postać:

$$v(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} w(\xi, \eta).$$

Różniczkujemy kolejno:

$$\begin{aligned}
v_\xi &= e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot \lambda \cdot w + e^{\lambda\xi+\mu\eta} w_\xi,\\
v_\eta &= e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot \mu \cdot w + e^{\lambda\xi+\mu\eta} w_\eta,\\
v_{\eta\eta} &= \mu^2 e^{\lambda\xi+\mu\eta} w + 2\mu e^{\lambda\xi+\mu\eta} w_\eta + e^{\lambda\xi+\mu\eta} w_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Obliczone pochodne wstawiamy do równania (1) i otrzymujemy (po skróceniu przez $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$):

$$w_{\eta\eta} + (2\mu + 9)w_\eta + 18w_\xi + (\mu^2 + 18\lambda + 9\mu - 9)w = 0.$$

Należy teraz tak dobrać $\mu$ i $\lambda$, by jak najwięcej współczynników przy pochodnych cząstkowych znikało. Rozwiązując układ równań:

$$2\mu + 9 = 0, \quad \mu^2 + 18\lambda + 9\mu - 9 = 0,$$

dostajemy:

$$\mu = -\frac{9}{2}, \quad \lambda = \frac{25}{2}.$$

Zatem ostatecznie przy podstawieniu

$$v(\xi, \eta) = e^{\frac{25}{2}\xi - \frac{9}{2}\eta}$$

otrzymujemy:

$$w_{\eta\eta} + 18w_\xi = 0$$

i to jest najprostsza postać wyjściowego równania.

**Zadanie 1.4.**

*Sprowadzić poniższe równanie do postaci kanonicznej i znaleźć jego rozwiązanie (o ile się da):*

$$u_{xx} + 4\cos 2x u_{xy} - 4\sin^2 2x u_{yy} - 4\sin 2x u_y = 0.$$

Ponieważ wyróżnik $\Delta > 0$ w całej płaszczyźnie, więc równanie jest hiperboliczne. Równanie charakterystyk:

$$F_x^2 + 4\cos 2x F_x F_y - 4\sin^2 2x F_y^2 = 0$$

można zapisać w postaci iloczynowej

$$(F_x + (2\cos 2x + 2)F_y)(F_x - (2 - 2\cos 2x)F_y) = 0.$$

Wystarczy więc znaleźć po jednej całce pierwszej dla układów:

$$\begin{cases} x' &= 1, \\ y' &= 2\cos 2x + 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= 1, \\ y' &= -(2 - 2\cos 2x). \end{cases}$$

Te całki to: $\phi(x, y) = y - \sin 2x - 2x$ i $\psi(x, y) = y - \sin 2x + 2x$. Możemy zastosować zamianę zmiennych $\xi = y - \sin 2x - 2x$ i $\eta = y - \sin 2x + 2x$. W tych nowych zmiennych pochodne cząstkowe funkcji $u$ są następujące:

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\eta(2 - 2\cos 2x) + v_\xi(-2 - 2\cos 2x), \\
u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi + v_\eta, \\
u_{xx} &= (v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x)(-2 - 2\cos 2x) + v_\xi(4\sin 2x) + (v_{\eta\xi}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x)(2 - 2\cos 2x) + \\
&\quad + v_\eta(4\sin 2x) = v_{\xi\xi}(2 + 2\cos 2x)^2 + v_{\xi\eta}(-8 + 8\cos^2 2x) + \\
&\quad + v_{\eta\eta}(2 - 2\cos 2x)^2 + v_\xi(4\sin 2x) + v_\eta(4\sin 2x), \\
u_{yx} &= v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x + v_{\eta\xi}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x = \\
&= v_{\xi\xi}(-2 - 2\cos 2x) + v_{\xi\eta}(-4\cos 2x) + v_{\eta\eta}(2 - 2\cos 2x), \\
u_{yy} &= v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\xi\eta}\eta_y + v_{\eta\xi}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Po wstawieniu ich do równania i wykonaniu redukcji otrzymujemy prostą postać

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Jego rozwiązaniem jest

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Aby $v \in C^2$, musi być $f, g \in C^2$. Ostatecznie, dowolne rozwiązanie wyjściowego równania ma postać:

$$u(x, y) = f(y - \sin 2x - 2x) + g(y - \sin 2x + 2x).$$

## 1.2 Warunki początkowe

**Zadanie 1.5.**

*Rozwiązać równanie*

$$u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^x u_{yy} - \sin x u_y = 0$$

*z warunkami*

$$u(x, \sin x) = x + \cos x, \quad u_y(x, \sin x) = \sin x. \tag{2}$$

Łatwo sprawdzamy, że równanie jest hiperboliczne, więc równanie charakterystyk:

$$F_x^2 + 2\cos x F_x F_y - \sin^2 x F_y^2 = 0$$

można zapisać w postaci iloczynowej

$$(F_x - (-\cos x - 1)F_y)(F_x - (-\cos x - 1)F_y) = 0.$$

Wystarczy więc znaleźć po jednej całce pierwszej dla układów:

$$\begin{cases} x' &= 1, \\ y' &= \cos x + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= 1, \\ y' &= \cos x - 1. \end{cases}$$

Te całki to: $\phi(x, y) = y - \sin x - x$ i $\psi(x, y) = y - \sin x + x$. Możemy zastosować zamianę zmiennych $\xi = y - \sin x - x$ i $\eta = y - \sin x + x$. W tych nowych zmiennych pochodne cząstkowe funkcji $u$ są następujące:

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi(-\cos x - 1) + v_\eta(-\cos x + 1), \\
u_y &= v_\xi + v_\eta, \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi}(-\cos x - 1)^2 + v_{\xi\eta}2(-1 + \cos^2 x) + v_{\eta\eta}(-\cos x + 1)^2 + v_\xi(\sin x) + v_\eta(\sin x), \\
u_{yx} &= v_{\xi\xi}(-\cos x - 1) + v_{\xi\eta}(-2\cos x) + v_{\eta\eta}(-\cos x + 1), \\
u_{yy} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Po wstawieniu do równania otrzymujemy

$$v_{\xi\eta} = 0,$$

więc

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

gdzie $f, g \in C^2$, i po powrocie do zmiennych $x, y$

$$u(x, y) = f(y - \sin x - x) + g(y - \sin x + x).$$

Wykorzystamy teraz warunki (2):

$$x + \cos x = u(x, \sin x) = f(\sin x - \sin x - x) + g(\sin x - \sin x + x) = f(-x) + g(x),$$

$$\sin x = u_y(x, \sin x) = 1 \cdot f'(\sin x - \sin x - x) + 1 \cdot g'(\sin x - \sin x + x) = f'(-x) + g'(x).$$

Dostajemy więc układ

$$\begin{cases} x + \cos x &= f(-x) + g(x), \\ \sin x &= f'(-x) + g'(x). \end{cases} \tag{3}$$

Po zróżniczkowaniu pierwszego równania tego układu, otrzymujemy nowy

$$\begin{cases} 1 - \sin x &= -f'(-x) + g'(x), \\ \sin x &= f'(-x) + g'(x), \end{cases}$$

z którego wyznaczamy

$$g'(x) = \frac{1}{2}, \quad f'(-x) = -\frac{1}{2} - 2\sin x.$$

Po scałkowaniu, uzyskujemy poszukiwane funkcje $f$ i $g$ :

$$g(x) = \int \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$f(-x) = \int \left(-\frac{1}{2} + \sin x\right) dx = -\frac{1}{2}x - \cos x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Wykorzystamy teraz pierwsze równanie układu (3), aby wyznaczyć stałe $C_1$, $C_2$. Ponieważ

$$f(-x) + g(x) = C_1 + C_2 - \cos x,$$

więc

$$C_1 + C_2 - \cos x = x + \cos x,$$

$$C_1 + C_2 = x + 2\cos x.$$

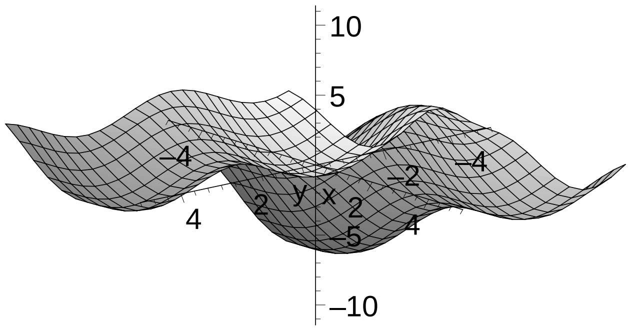
Znalezione funkcje $f$ i $g$ wstawiamy teraz do rozwiązania $u$ :

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(y - \sin x - x) - \cos(y - \sin x - x) + C_2 + \frac{1}{2}(y - \sin x + x) + C_1,$$

czyli

$$u(x, y) = x + y + 2\cos x - \sin x - \cos(y - \sin x - x)$$

jest szukaną postacią funkcji $u$.




Rozwiązanie problemu początkowego

**Zadanie 1.6.**

*Rozwiązać równanie*

$$e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$$

*z warunkami początkowymi:*

$$u(x,0) = -\frac{1}{2}x^2, \tag{4}$$

$$u_y(x,0) = -\sin x. \tag{5}$$

Równanie to ma już praktycznie postać kanoniczną. Zatem, by je rozwiązać, wystarczy wykonać podstawienie $u_y = w$. Wtedy dostajemy równanie

$$e^y w_x - w_y + w = 0,$$

które jest pierwszego rzędu. Znajdziemy więc dwie całki pierwsze układu

$$\begin{cases} x' &= e^y, \\ y' &= -1, \\ w' &= -w. \end{cases}$$

Całkujemy drugie równanie, aby uzyskać $y(t) = -t + A,\ A \in \mathbb{R}$. Uzyskany wynik wstawiamy do pierwszego równania i również całkujemy:

$$x'(t) = e^{-t+A},$$

$$x(t) = -e^{-t+A} + B, \quad B \in \mathbb{R}.$$

Z otrzymanych $x$ i $y$ rugujemy parametr $t$:

$$x + e^y = B,$$

zatem szukaną całką pierwszą jest $\psi_1(x, y, w) = x + e^y$. Rozwiążmy teraz trzecie równanie układu. Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, a jego rozwiązaniem jest

$$w(t) = Ce^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z $w$ i uzyskanego poprzednio $x$ znowu rugujemy parametr $t$:

$$we^{-y} = Ce^{-A},$$

zatem drugą całką pierwszą jest $\psi_2(x, y, w) = we^{-y}$. Rozwiązanie dane jest więc w postaci uwikłanej $\Phi(\psi_1, \psi_2) = 0$, czyli

$$\Phi(x + e^y, we^{-y}) = 0.$$

Zauważmy, że spełnione są założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej, więc

$$we^{-y} = f(x + e^y),$$

czyli

$$w = e^y f(x + e^y),$$

przy czym o funkcji $f$ należy założyć, że jest klasy $C^1$. Ponieważ $u_y = w$, to z warunku (5) mamy

$$-\sin x = u_y(x, 0) = f(x + 1),$$

co daje postać funkcji $f(t) = -\sin(t - 1)$. Stąd

$$u_y = -e^y \sin(x - 1 + e^y).$$

Całkując ten wynik względem zmiennej $y$, otrzymamy

$$u(x, y) = \cos(x - 1 + e^y) + D(x), \quad D \in C^2.$$

Postać funkcji $D$ możemy wyznaczyć teraz z warunku (4):

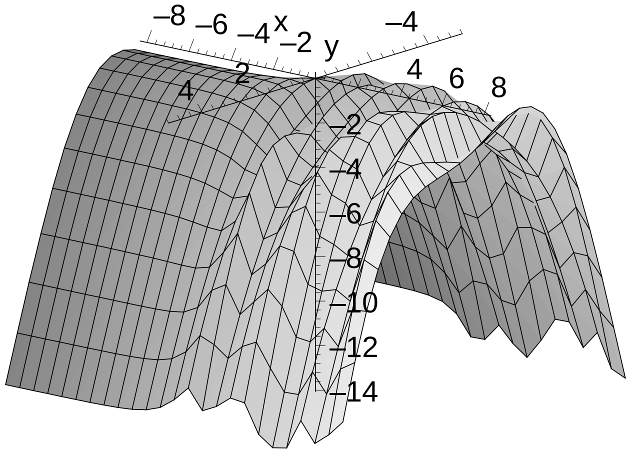
$$-\frac{1}{2}x^2 = u(x, 0) = \cos x + D(x),$$

czyli

$$D(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \cos x.$$

Ostatecznie rozwiązaniem równania jest

$$u(x, y) = \cos(x - 1 + e^y) - \cos x - \frac{1}{2}x^2.$$




Rozwiązanie problemu początkowego

## 1.3 Zestaw zadań do ćwiczenia samodzielnego

**1.** Sprowadzić następujące równania do najprostszej postaci kanonicznej:

(i) $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0$,

(ii) $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0$,

(iii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$,

(iv) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$,

(v) $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0$,

(vi) $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$,

(vii) $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$,

(viii) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$,

(ix) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

(x) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

(xi) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

(xii) $\mathrm{tg}^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\,\mathrm{tg}x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathrm{tg}^3 x\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

(xiii) $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$,

(xiv) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} + 4y\frac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0$,

(xv) $(1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

(xvi) $\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

Pierwsze dziewięć równań, to równania o stałych współczynnikach.

**2.** Znaleźć rozwiązania ogólne równań:

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

(ii) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \ x > 0, y > 0$,

(iii) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0$,

(iv) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$,

(v) $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}) = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

(vi) $(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

(vii) ($\star$) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2zx \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0$,

(viii) ($\star$) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^u}{\partial y^4} = 0$.

**3.** Znaleźć obszary hieperboliczności, eliptyczności i paraboliczności, a także ogólne (o ile istnieje) rozwiązanie równań:

(i) $(1-x^2)u_{xx} - 2xyu_{yx} - (1+y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0$,

(ii) $(x^2-1)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (1+y^2)u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0$.

**4.** ($\star$) Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{n(n+1)}{x^2}u$$

ma postać:

$$u = x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\phi(x-at)+\theta(x+at)}{x}\right),$$

gdzie $\phi$ i $\theta$ są dowolnymi odpowiednimi (jednej zmiennej, odpowiedniej klasy) funkcjami.

**5.** Znaleźć ogólne rozwiązanie równania:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{3}{(x-y)^2}u = 0.$$

**6.** Rozwiązać następujące zagadnienia Cauchy'ego:

(i) $4y^2 u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0, \quad u(x,y)_{|y=0} = \varphi(x), u_y(x,y)_{|y=0} = \psi(x)$,

(ii) $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0, \quad u(0,y) = \varphi(y), u_x(0,y) = \psi(y)$,

(iii) $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), u_y(x,0) = \psi(x)$,

(iv) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \quad u(x,0) = -\frac{1}{2}x^2, u_y(x,0) = -\sin x$,

(v) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3+\cos^x)u_{yy} - \cos x u_y = 0, \quad u(x\cos x) = \sin x, u_y(x,\cos x) = \frac{1}{2}e^x$,

(vi) $u_{xx}-2\sin x u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}+u_x+(2-\sin x-\cos x)u_y=0$, $u(x,\cos x)=0$, $u_y(x,\cos x)=e^{\frac{-x}{2}}\cos x$,

(vii) $u_{xx}+2\sin x u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}+u_x+(\sin x+\cos x+1)u_y=0$, $u(x,-\cos x)=1+2\sin x$, $u_y(x,-\cos x)=\sin x$,

(viii) $4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0$, $u(x,0)=\varphi_0(x)$, $u_y(x,0)=\varphi_1(x)$,

(ix) $u_{xx}+4\sin x u_{xy}-4\cos^2 x u_{yy}+2\cos x u_y=0$, $u(x,-2\cos x)=16x^3$, $u_y(x,-2\cos x)=16x$.

**7.** Znaleźć wszystkie charaketrystyki równania drgań struny:

$$u_{xx}-u_{tt}=0.$$

**8.** Określić powierzchnie charakterystyczne drugiego rzędu dla równania drgań membrany:

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_{tt}=0.$$

**9.** Znaleźć wszystkie płaszczyzny charakterystyczne równania falowego:

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}-u_{tt}=0.$$

**10.** Funkcja $u(x,t)$ o ciągłych pochodnych cząstkowych trzeciego rzędu jest rozwiązaniem równania

$$u_{XX}-u_{tt}=0.$$

Wykazać, że równanie to spełnia także funkcja:

$$v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

**11.** Wykazać, że wraz z funkcją $u(x,t)$ rozwiązaniem równania

$$u_{XX}-u_{tt}=0$$

są i funkcje:

(i) $xu_x+tu_t$,

(ii) $u_x^2 + u_t^2$,

(iii) $\frac{u_t}{u_x^2 - u_t^2}$, $u_x^2 \neq u_t^2$.

**12.** Wykazać, że najogólniejsze rozwiązanie równania

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} - u_{tt} = 0$$

zależne tylko od $r$ i $t$ ma postać:

$$u(r,t) = \frac{f_1(r+t)}{r} + \frac{f_2(r-t)}{r},\ r \neq 0,$$

gdzie $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, a $f_1$ i $f_2$ są dowolnymi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi w sposób ciągły (rozwiązania te nazywamy falami sferycznymi).

# 2 Metoda rozdzielania zmiennych Fouriera

## 2.1 Szeregi Fouriera - repetytorium do ćwiczenia samodzielnego

**13.** Znaleźć szereg Fouriera funkcji $2\pi$-okresowej, która na przedziale $\langle -\pi, \pi)$ dana jest wzorem $f(x) = x$. Zbadać jej zbieżność. Obliczyć wartość szeregu dla $x = \frac{\pi}{2}$.

**14.** Znaleźć szereg Fouriera funkcji $2\pi$-okresowej, która na przedziale $\langle 0, 2\pi)$ jest określona $g(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$. Zbadać jej zbieżność.

**15.** Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \sin 3x$ na przedziale $\langle 0, \frac{2\pi}{3})$. Zbadać zbieżność.

**16.** Funkcję $g(x) = \sin x$ przedstawić w postaci sumy szeregu $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ na przedziale $(0, \pi)$.

**17.** Co należy założyć o funkcji $f : [0, l] \to \mathbb{R}$, aby można ją było przedłużyć do funkcji:

(i) nieparzystej na przedział $[-l, l]$, a następnie okresowo (o okresie $2l$) na $\mathbb{R}$ do funkcji klasy $C^1, C^2, C^k$,

(ii) parzystej i dalej j.w.

**18.** Załóżmy, że dana jest funkcja $f \in C^p(\mathbb{R})$ o okresie $2a$ oraz

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\sin\frac{n\pi}{a}t\,dt, \quad b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\cos\frac{n\pi}{a}t\,dt.$$

(i) Wykazać, że: $|a_n| \leqslant \frac{A}{n^p}$, $|b_n| \leqslant \frac{B}{n^p}$, gdzie $A, B$ są pewnymi stałymi.

(ii) Wykazać, że szereg $\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin\frac{n\pi}{a}t + b_n\cos\frac{n\pi}{a}t)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f$ na przedziale $(-a, a)$. Co trzeba założyć o $p$?

(iii) Co trzeba założyć o $p$, aby szereg z poprzedniego podpunktu był dwukrotnie różniczkowalny wyraz po wyrazie, a tym samym funkcja wyrażona poprzez ten szereg była klasy $C^2$? Co trzeba założyć o $p$, by ta funkcja była klasy $C^p$?

# Bibliografia


[1] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.

[2] W. I. Arnold, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1975.

[3] W. I. Arnold, *Teoria równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1983.

[4] A. W. Bicadze, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1984.

[5] A. W. Bicadze, D. F. Kaliniczenko, *Zbiór zadań z równań fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1984.

[6] P. Biler Prof. dr hab.- redakcja naukowa, *Warsztaty z równań różniczkowych cząstkowych*, Toruń 2003.

[7] Birkholc A. *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[8] D. Bleecker, G. Csordas, *Basic Partial Differential Equations*, Chapman & Hall, Oxford 1995.

[9] L. Evans, *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa 2002.

[10] Fichtenholz G.M. *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1980.

[11] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg-New York 2002.

[12] W. Kołodziej, *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.

[13] H. Marcinkowska, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1972.

[14] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.

[15] Ockendon J., Howison S., Lacey A., Movxhan A., *Applied Partial Differential Equations*, Oxford University Press, 2003.

[16] J. Ombach, *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo -Maple*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1999.

[17] B. Przeradzki, *Równania różniczkowe cząstkowe. Wybrane zagadnienia*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2000.

[18] B. Przeradzki, *Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2003.

[19] M. M. Smirnow, *Zadania z równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1970.

[20] P. Strzelecki, *Krótkie wprowadzenie do równań różniczkowych cząstkowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2006.

[21] B. W. Szabat, *Wstęp do analizy zespolonej*, PWN, Warszawa 1974.

[22] Whitham G.B., *Lecture notes on wave propagation* , Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1979.

[23] Zauderer, *Partial Differential Equations of Applied Mathemathics*, John Wiley & Sons, Singapore-New York-Chichester-Brisbane-Toronto 1989.