Rozdział V.

Szeregi liczbowe.

Zagadnienie zbieżności szeregów liczbowych.

Szeregi liczbowe stanowią uogólnienie sum skończonych. Niech dany będzie ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz niech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem sum częściowych danego ciągu, którego wyrazy określone są następująco

$$\begin{aligned} &s_1 = a_1 \\ &s_2 = a_1 + a_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Jedna z możliwych definicji szeregu liczbowego mówi, że jest to para $((a_n), (s_n))$. Możemy także powiedzieć, że szeregiem nazywamy sumę nieskończoną postaci

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Widzimy więc, że jeśli obliczamy sumę szeregu to w rzeczywistości danemu ciągowi (a_n) przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a więc szereg to funkcjonał, który oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} : \ (a_n) \longrightarrow s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jest zbieżny do skończonej liczby s, lub, że ma sumę równą s, co zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, jeżeli ciąg sum częściowych (s_n) jest zbieżny do granicy s, przy $n \to \infty$. Jeżeli ciąg sum częściowych (s_n) nie jest zbieżny, to szereg nazywamy rozbieżnym.

W szczególności gdy $s_n \to \infty$ przy $n \to \infty$ to piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ i mówimy, że szereg jest rozbieżny do ∞ (możemy także mówić, że szereg jest zbieżny do ∞). Natomiast w przypadku, gdy $s_n \to -\infty$, przy $n \to \infty$ będziemy mówili, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do $-\infty$ (możemy także mówić, że szereg jest zbieżny do $-\infty$) i zapisujemy to

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$. Często w szeregach musimy uwzględniać wyraz a_0, będziemy wówczas pisali

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}.$$

Z podanej definicji wynika, że dwa szeregi różniące się się skończoną ilością wyrazów są albo równocześnie rozbieżne, albo równocześnie zbieżne.

Twierdzenie 5.1. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ może być zbieżny tylko wtedy gdy ciąg jego wyrazów (a_n) dąży do zera, przy $n \to \infty$, tj. gdy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ .$$

Dowód.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, to również $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$, a więc $a_n = s_n - s_{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Zauważmy, że warunek podany w powyższym twierdzeniu jest warunkiem koniecznym zbieżności szeregu. Aby się przekonać, że nie jest to warunek dostateczny wystarczy rozważyć szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Wyraz ogólny szeregu harmonicznego spełnia warunek podany w powyższym twierdzeniu, jednak jak pokażemy w przykładzie 5, szereg ten jest rozbieżny.

W dalszym ciągu gdy dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, to a_n nazywamy wyrazem ogólnym szeregu, natomiast n nazywamy wskaźnikiem lub indeksem.

Zauważmy, że jeśli dany jest ciąg (s_n), to jest on ciągiem sum częściowych szeregu postaci

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \ldots = s_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_{n+1} - s_n) \ .$$

Twierdzenie 5.2. *Szeregi zbieżne mają własność łączności dodawania wyrazów sąsiednich, tzn. jeżeli w szeregu zbieżnym $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ połączymy wyrazy sąsiednie w grupy, np.*

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots$$

gdzie $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$, to otrzymany szereg jest zbieżny do tej samej sumy s.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że ciąg sum częściowych (s_{n_k}) szeregu przekształconego jest podciągiem ciągu sum częściowych (s_n) szeregu danego, a ciąg (s_n) jest zbieżny.

Twierdzenie 5.3. *Załóżmy, że dane są dwa szeregi zbieżne* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ *oraz, że* λ *jest dowolnym skalarem. Wóczas szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *są zbieżne i zachodzą wzory*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = a - b$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a$.

Ograniczymy się do podania dowodów wzorów (a) oraz (c). Niech (s_n), $(s_n^{(1)})$, $(s_n^{(2)})$, oraz $(s_n^{(3)})$ oznaczają ciągi sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$. Mamy wówczas

$$s_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$$

oraz

$$s_n^{(3)} = (\lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n) = \lambda(a_1 + \ldots + a_n) = \lambda s_n^{(1)} .$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = a$, $\lim_{n\to\infty} s_n^{(2)} = b$, więc otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} s_n = a+b$ oraz $\lim_{n\to\infty} s_n^{(3)} = \lambda a$.

Twierdzenie 5.4. *Na to aby szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *był zbieżny potrzeba i wystarcza aby ciąg jego reszt* (r_n)*, gdzie* $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *był zbieżny do zera, przy* $n \to \infty$*.*

Dla dowodu oznaczmy przez $(s_n^{(1)})$ oraz $(s_k^{(2)})$ ciągi sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Mamy oczywiście

$s_n^{(1)} = a_1 + \ldots + a_n$, $s_k^{(2)} = a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}$ oraz $s_{n+k}^{(1)} = s_n^{(1)} + s_k^{(2)}$.

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} s_{n+k}^{(1)}$ więc wynika, że $\lim_{n\to\infty} (s_{n+k}^{(1)} - s_n^{(1)}) = 0$. Ale $s_k^{(2)} = s_{n+k}^{(1)} - s_n^{(1)}$ więc stwierdzamy, że $\lim_{k\to\infty} s_k^{(2)} = 0$.

Wykazaliśmy, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Jeżeli założymy, że $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, to wiemy, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall} \mid r_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Obierzmy liczbę N tak, aby $n > m > N$. Możemy napisać

$$\begin{aligned} \mid s_n^{(1)} - s_m^{(1)} \mid &= \mid a_{m+1} + \ldots + a_n \mid = \\ &= \mid (a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots) - (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots) \mid = \\ &= \mid r_m - r_n \mid \le \mid r_m \mid + \mid r_n \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że ciąg $(s_n^{(1)})$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc ciąg sum częściowych $(s_n^{(1)})$ jest zbieżny, a to oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym, jeżeli szereg $\sum_{n\to\infty} \mid a_n \mid$ jest zbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy warunkowo zbieżnym jeżeli jest on zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Sformułujemy teraz twierdzenia mówiące o bezwzględnej i warunkowej zbieżności szeregów liczbowych. Dowody tych twierdzeń można znaleźć w cytowanej literaturze.

Twierdzenie 5.5. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Twierdzenie 5.6. *Szereg bezwględnie zbieżny pozostaje zbieżny i nie zmienia swojej sumy po dowolnej zmianie porządku wyrazów.*

Twierdzenie 5.7. (twierdzenie Riemanna). *W szeregu warunkowo zbieżnym można tak zmienić porządek wyrazów, aby nowy szereg był zbieżny do dowolnie obranej liczby, lub tak aby nowy szereg był rozbieżny .*

Przykładem szeregu warunkowo zbieżnego jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Zbieżność tego szeregu badana będzie w przykładzie 12, natomiast jego bezwzględna zbieżność badana będzie w przykładzie 5.

Mnożenie szeregów.

Mnożenie szeregów jest uogólnieniem mnożenia sum skończonych. Załóżmy, że dane są dwa szeregi zbieżne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$. Dla utworzenia iloczynu szeregów

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ należy dodać wszystkie możliwe składniki postaci $a_i b_j$. W tym celu tworzymy tablicę

$$\begin{array}{lll} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \ldots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \ldots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

oraz ustalamy sposób dodawania wyrazów występujących w tej tablicy.
Oznaczmy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) .$$

(a) Jeżeli wyrazy c_n zdefiniujemy wzorem

$$c_n = \sum a_i b_j \ ,$$

gdzie $n = i \cdot j$, a więc iloczyn wskaźników jest stały, to otrzymujemy sposób mnożenia metodą Dirichleta.

(b) Gdy $c_n = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_1 b_{n-2} + a_0 b_{n-1}$, a więc dodajemy wyrazy leżące na bocznych przekątnych powyższej tablicy, to otrzymujemy sposób mnożenia metodą Cauchy'ego.

(c) Jeżeli wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ zdefiniujemy wzorem

$$c_n = a_n b_1 + a_n b_2 + \ldots + a_n b_{n-1} + a_n b_n + a_{n-1} b_n + \ldots + a_2 b_n + a_1 b_n$$

to otrzymujemy sposób mnożenia szeregów według kwadratów (sumujemy te wyrazy powyższej tablicy, które leżą na dolnym i prawym boku odpowiedniego kwadratu tablicy).

Twierdzenie 5.8. (twierdzenie Cauchy'ego). *Jeżeli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są bezwzględnie zbieżne, to ich iloczyn* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *jest bezwzględnie zbieżny i zachodzi wzór*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b \ ,$$

przy czym sposób sumowania jest dowolny.

Twierdzenie 5.9. (twierdzenie Mertensa). *Jeżeli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne oraz przynajmniej jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny, to ich iloczyn* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *otrzymany metodą mnożenia Cauchy'ego jest zbieżny i zachodzi wzór*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b \quad .$$

Dowody twierdzeń 8 i 9 pominiemy, gdyż należą do trudnych technicznie, ale warto zaznaczyć, że F. Mertens był profesorem Uniwersytetu Jagiellońskiego, w okresie od 1865 r. do 1884 r.

Szeregi liczbowe o wyrazach nieujemnych.

Rozważmy teraz szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach $a_n > 0$ lub $a_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jest oczywiste, że przy takim założeniu o wyrazach szeregu ciąg sum częściowych (s_n) jest albo rosnący albo niemalejący. Wynika więc, że szeregi o wyrazach nieujemnych są albo zbieżne, co możemy zapisać $\sum_{n=1}^{\infty} a_k < \infty$, albo są rozbieżne do ∞.

Podamy kilka twierdzeń, które pozwalają rozstrzygnąć problem zbieżności szeregów. Ograniczymy się do podania tzw. postaci limesowej trzech z tych kryteriów, a dla przykładu przeprowadzimy dowody dwóch z nich.

Kryterium porównawcze. Jeżeli wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dla prawie wszystkich n spełniają nierówności

$$(+) \qquad 0 \leq a_n \leq b_n \ ,$$

to gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (nazywany minorantą) jest zbieżny, wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest także zbieżny, natomiast gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (nazywany minorantą) jest rozbieżny to rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dowód.

Oznaczmy przez $s_n^{(1)}$ oraz $s_n^{(2)}$ sumy częściowe szeregów odpowiednio $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Mamy wówczas na podstawie (+)

$$s_n^{(1)} = a_1 + \ldots + a_n \leq b_1 + \ldots + b_n = s_n^{(2)} \ .$$

Jeżeli majoranta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest szeregiem zbieżnym, to ciąg sum częściowych $(s_n^{(2)})$ jest zbieżny, a więc ograniczony przez s. Wynika stąd, że także ciąg sum częściowych $(s_n^{(1)})$

jest ograniczony. Ale wiemy, że $(s_n^{(1)})$ jest ciągiem rosnącym (lub niemalejącym), a więc ciąg $(s_n^{(1)})$ jest zbieżny, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli minoranta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem rozbieżnym, to $s_n^{(1)} \longrightarrow \infty$ przy $n \longrightarrow \infty$.
Na podstawie (+) stwierdzamy, że także $s_n^{(2)} \longrightarrow \infty$ przy $n \longrightarrow \infty$, a to oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Kryterium ilorazowe, (d'Alemberta).

Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n > 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz niech

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \, . \tag{++}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$; jest rozbieżny, gdy $g > 1$, (przypadek gdy $g = 1$ wymaga osobnego zbadania).

Dowód.

Na podstawie założenia (++) wiemy, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{N}{\exists} \; \underset{n>N}{\forall} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - g \right| < \varepsilon \, .$$

Jeżeli przyjmiemy $\varepsilon = \frac{1}{2} \mid 1 - g \mid$, to dla dostatecznie dużych n możemy napisać nierówności

$$g - \frac{1}{2} \mid 1 - g \mid < \frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \frac{1}{2} \mid 1 - g \mid \, . \tag{+++}$$

W przypadku, gdy $g > 1$ lewa strona nierówności (+++) daje warunek

$$1 < \frac{g+1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} \, .$$

A więc dla dostatecznie dużych n otrzymujemy nierówności $a_n < a_{n+1}$. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest rosnący do ∞, czyli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. W przypadku, gdy $g < 1$ prawa strona nierówności (+++) daje warunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{g+1}{2} = r < 1 \, .$$

Z nierówności tej wynika, że dla dostatecznie dużych n spełnione są nierówności

$$a_{n+1} < r a_n \ .$$

Ale $a_2 < ra_1$, $a_3 < ra_2 < r^2 a_1, \ldots, a_{n+1} < r^n a_1, \ldots$ a więc dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ znaleźliśmy majorantę liczbową $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_1 \equiv a_1 \sum_{n=1}^{\infty} r^n$. Majoranta jest szeregiem zbieżnym (porównaj przykład 3), a więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
Pokażemy jeszcze, że w przypadku gdy $g = 1$ kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga czy szereg jest zbieżny, czy jest rozbieżny.
Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ spełniony jest warunek $\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, a jak wiemy szereg ten jest rozbieżny (porównaj przykład 5).
Dla szeregu $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ mamy warunek
$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1$, a szereg $\zeta(2)$ jest zbieżny (porównaj przykład 13).

Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego).

Załóżmy, że dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taki, że $a_n \geq 0$ i niech

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

lub

$$q = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \ .$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $q < 1$, jest rozbieżny gdy $q > 1$, (w przypadku gdy $q = 1$ kryterium Cauchy'ego nie daje rozstrzygnięcia).

Z ogólnej teorii ciągów wiadomo, że jeżeli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, to istnieje również granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i granice te są sobie równe (oczywiście zakładamy, że $a_n > 0$ dla każdego n). Wynika stąd wniosek: kryterium pierwiastkowe zawsze rozstrzyga problem zbieżności szeregu, jeśli rozstrzyga ten problem kryterium ilorazowe; ponadto wtedy gdy kryterium ilorazowe nie rozstrzyga problemu zbieżności szeregu, kryterium pierwiastkowe może dać rozstrzygnięcie.

Podamy jeszcze kryterium Raabe'go, które jest mocniejsze od kryterium Cauchy'ego, a więc także mocniejsze od kryterium d'Alemberta.

Kryterium Raabe'go.

Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, którego wyrazy są dodatnie i niech spełniony będzie następujący warunek

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \gamma \ .$$

Jeżeli $\gamma > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli $\gamma < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, natomiast w przypadku gdy $\gamma = 1$ kryterium nie daje rozstrzygnięcia.

Szeregi naprzemienne

Szeregiem naprzemiennym lub przemiennym nazywamy szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, gdzie $a_n \geq 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Widzimy więc, że szereg naprzemienny to szereg postaci

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

Kryterium Leibniza.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera, to szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

jest zbieżny.

Dowód.

Wiemy, że ciąg o wyrazach nieujemnych (a_n) jest malejący. Łatwo sprawdzić, że ciąg sum częściowych (s_{2n}), gdzie

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

jest rosnący i ograniczony z dołu przez $a_1 - a_2$, natomiast ciąg sum częściowych (s_{2n+1}), gdzie

$$s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

jest malejący i ograniczony z góry przez a_1. Ale dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$a_1 - a_2 \leq s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} < a_1 \ ,$$

więc stwierdzamy, że ciągi monotoniczne (s_{2n}) i (s_{2n+1}) są ograniczone. Wynika więc, że ciągi te są zbieżne, a ponieważ spełniony jest warunek

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

więc wynika, że $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$. Stwierdziliśmy więc, że szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny.

Przykłady.

W poniższych zadaniach należy obliczyć sumę szeregu liczbowego lub należy rozstrzygnąć, czy dany szereg jest zbieżny.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \quad .$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ prawdziwy jest wzór

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \ ,$$

więc n-tą sumę częściową możemy zapisać w postaci

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \\ + \\ + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy wzór $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad .$$

R o z w i ą z a n i e. Wyraz ogólny szeregu możemy przedstawić w następującej postaci przy pomocy ułamków prostych

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \ ,$$

a więc n-ta suma częściowa przyjmuje postać

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 4}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}\right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}\right) = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \ . \end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad , \quad q \neq 1 \quad$, (szereg geometryczny).

R o z w i ą z a n i e. Przez indukcję obliczamy n-tą sumę częściową szeregu geometrycznego

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

Wiemy, że ciąg (q^n) jest zbieżny do zera gdy $\mid q \mid< 1$, natomiast jest rozbieżny dla $\mid q \mid> 1$. Wynika więc, że $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$. Otrzymujemy wzór

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \ , \qquad \text{dla} \quad \mid q \mid< 1 \ .$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad .$

R o z w i ą z a n i e. Wyraz ogólny szeregu ma własność

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ ,$$

a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, czyli szereg

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$$

jest rozbieżny.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad$, (szereg harmoniczny).

R o z w i ą z a n i e. Gdyby szereg harmoniczny był zbieżny to wówczas $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n$. Jeśli obliczymy różnicę $s_{2n} - s_n$ to otrzymujemy

$$s_{2n} - s_n = (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ .$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż z jednej strony mamy nierówność

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2} \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

a z drugiej strony wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=0\ .$$

Wykazaliśmy więc, że szereg harmoniczny jest rozbieżny.

6. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ .$$

R o z w i ą z a n i e. Pokażemy, że ciąg sum częściowych (s_n) posiada dwa punkty skupienia, a więc nie jest zbieżny, co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ jest rozbieżny.

Obliczmy

$$s_{2n}=(-1+1)+\ldots+(-1+1)=0\ ,$$

$$s_{2n+1}=(-1+1)+\ldots+(-1+1)-1=-1\ ,$$

a więc $\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}=0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=-1$.

7. $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}\ .$$

R o z w i ą z a n i e. Dla szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ znajdziemy zbieżną majorantę liczbową $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$.

Możemy zapisać

$$a_n=\frac{\ln n}{2^n}\le\frac{n}{2^n}=b_n\ .$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$, więc na podstaie kryterium pierwiastkowego stwierdzamy, że majoranta $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$ jest szeregiem zbieżnym, a więc szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}$ jest zbieżny.

8. $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\ .$$

R o z w i ą z a n i e. Jeżeli wyraz ogólny szeregu oznaczymy przez a_n, to możemy napisać

$$a_n=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}=b_n\ ,\qquad \text{dla}\quad n=2,3,\ldots\ .$$

Minoranta $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$ jest szeregiem harmonicznym, a więc dany szereg jest rozbieżny.

9. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} \quad .$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ dla każdej liczby naturalnej prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{1+2^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

a wiemy, że szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest zbieżny, więc stwierdzamy, że dany szereg jest także zbieżny.

10. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \quad .$$

R o z w i ą z a n i e. Dany szereg jest rozbieżny, ponieważ po zastosowaniu kryterium ilorazowego stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1 \; .$$

11. $$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n} \quad .$$

R o z w i ą z a n i e. Dla zbadania zbieżności tego szeregu naprzemiennego zastosujemy kryterium Leibniza. W tym celu wystarczy obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$$

oraz napisać nierówność prawdziwą dla $n = 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n} \; .$$

12. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad \text{, (szereg anharmoniczny).}$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i dąży do zera przy $n \to \infty$, więc na podstawie kryterium Leibniza stwierdzamy, że szereg anharmoniczny jest zbieżny. Można wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2 \; .$$

13. $$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad , \text{(szereg harmoniczny rzędu } \alpha).$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ ani kryterium ilorazowe ani kryterium pierwiastkowe nie dają rozstrzygnięcia, dlatego zastosujemy kryterium Raabe'go. Obliczamy w tym celu granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right) .$$

Najpierw rozpatrujemy funkcję $f(x) = x\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^\alpha - 1\right)$, która w przypadku gdy $x = n$ przyjmuje wartość $f(n) = n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right)$. Jeżeli stosując regułę de l'Hospitale'a (patrz rozdział o pochodnych funkcji) obliczymy $\lim_{x\to\infty} f(x)$ to okazuje się, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ a więc, że

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = \alpha .$$

Stwierdzamy więc, że szerg $\zeta(\alpha)$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ oraz jest rozbieżny dla $\alpha < 1$. W przypaku gdy $\alpha = 1$ otrzymujemy szereg harmoniczny (patrz przykład 5).
Można wykazać, że np. dla $\alpha = 2$ mamy

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} .$$