CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

INFORMATYKA
Transport, studia niestacjonarne I stopnia, semestr I
rok akademicki 2012/2013

Instytut L-5, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska

Ewa Pabisek

Adam Wosatko

Kiedy stosujemy całkowanie numeryczne?

W przypadkach elementarnych obliczanie wartości całki oznaczonej odbywa się na podstawie wzoru Newtona-Leibnitza

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Powyższy wzór możemy stosować wtedy, gdy znana jest tzw. **funkcja pierwotna** $F(x)$ spełniająca związek:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Jeśli wyznaczenie funkcji pierwotnej jest bardzo trudne lub niemożliwe i/lub funkcja podcałkowa $f(x)$ zadana jest w postaci tablicy, to możliwe jest stosowanie całkowania numerycznego.

Na czym polega numeryczne całkowanie?

Gdy przedział całkowania jest skończony, wówczas numeryczne całkowanie polega na **zastąpieniu funkcji podcałkowej** $f(x)$ **odpowiednim wielomianem interpolacyjnym lub aproksymacyjnym** $\varphi(x)$ zbudowanym na zbiorze $n+1$ węzłów o współrzędnych $x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Wymaga to wówczas całkowania jedynie prostych funkcji bazowych z wykorzystaniem wzoru na $I(f)$. W dalszym ciągu omówione zostaną najprostsze metody całkowania numerycznego wykorzystujące interpolację (aproksymację) funkcji za pomocą wielomianów algebraicznych. Podstawiając w miejsce funkcji podcałkowej $f(x)$ wielomian algebraiczny

$$\varphi(x) = f_0\, N_0(x) + f_1\, N_1(x) + \cdots + f_n\, N_n(x)$$

otrzymamy tzw. wzór kwadraturowy.

Kwadratura całkowania

Wzorem kwadraturowym albo krócej **kwadraturą** nazywamy:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b N_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i) = S(f)$$

w którym

$$w_i = \int_a^b N_i(x)\,\mathrm{d}x, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

są tzw. **współczynnikami wagowymi** (wagami). Wartość w_i określa wielkość udziału rzędnej $f_i \equiv f(x_i)$ w wartości całej sumy $S(f)$.

Dokładność kwadratury $S(f)$ jest tym większa, im mniejsza jest różnica $I(f) - S(f)$ nazywana błędem kwadratury.

Rząd kwadratury

Najczęściej stosowaną miarą dokładności jest tzw. **rząd kwadratury**.
Kwadratura $S(f)$ jest rzędu r, jeśli

- dla wszystkich wielomianów $W(x)$ stopnia mniejszego od r jest $I(W) = S(W)$ oraz
- jeśli istnieje taki wielomian $W(x)$ stopnia r dla którego $I(W) \neq S(W)$.

Można wykazć, że kwadratury interpolacyjne zbudowane na $n+1$ węzłach są rzędu co najmniej $n+1$.

Kwadratury dla węzłów równoodległych

Najprostszymi kwadraturami interpolacyjnymi są kwadratury zbudowane na węzłach równoodległych, o danych współrzędnych $x_i = x_0 + i \cdot h,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Niewiadome współczynniki w_i są obliczane z układu $n + 1$ liniowych równań algebraicznych, które otrzymamy na podstawie kwadratury zastosowanej dla wielomianów $W_k(x) = x^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$, dla których $I(W_k) = S(W_k)$.

$$I(W_k) = \int_a^b x^k \,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} w_i\, x_i^k = S(W_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

skąd

$$\sum_{i=0}^{n} w_i\, x_i^k = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1} \right)$$

Kwadratury interpolacyjne – układ równań

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
1\,w_0 & + & 1\,w_1 & \cdots & + & 1\,w_n & = & p_0 \\
x_0\,w_0 & + & x_1\,w_1 & \cdots & + & x_n\,w_n & = & p_1 \\
x_0^2\,w_0 & + & x_1^2\,w_1 & \cdots & + & x_n^2\,w_n & = & p_2 \\
 & & \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & & \\
x_0^n\,w_0 & + & x_1^n\,w_1 & \cdots & + & x_n^n\,w_n & = & p_n
\end{array}
$$

Powyższy układ równań można zapisać w postaci:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\
 & & \cdots\cdots\cdots & & \\
x_0^n & x_1^n & x_n^2 & \dots & x_n^n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ . \\ w_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b-a \\
\frac{1}{2}(b^2-a^2) \\
\frac{1}{3}(b^3-a^3) \\
\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{(n+1)}\left(b^{(n+1)}-a^{(n+1)}\right)
\end{bmatrix}
$$

Rozwiązaniem tego układu algebraicznych równań liniowych są wartości wag w_i.

Wzór prostokątów

Najprostszym sposobem obliczania przybliżonej wartości $S(f)$ całki oznaczonej $I(f)$ jest zastosowanie aproksymacji funkcji $f(x)$ za pomocą wielomianu

$$\varphi(x) = f(x_0) = \text{const.}$$

Po podstawieniu do wzoru

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

otrzymujemy

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f(x_0)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot f(x_0) = S(f). \tag{1}$$

przy czym $w_0 = b - a$.

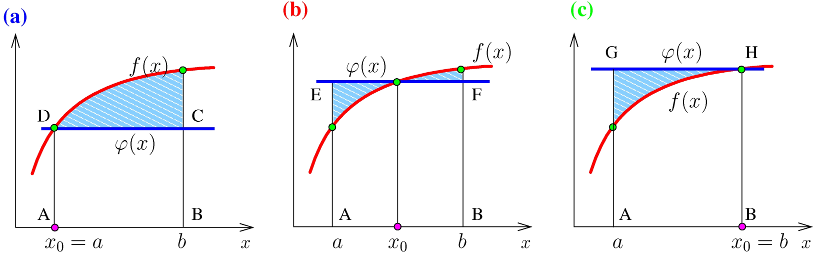
Wybór położenia węzła dla wzoru prostokątów

W zależności od wyboru położenia węzła x_0 otrzymujemy wzory:

(a) **lewych prostokątów, gdy** $x_0 = a$

(b) **środkowych prostokątów, gdy** $x_0 = (a+b)/2$

(c) **prawych prostokątów, gdy** $x_0 = b$

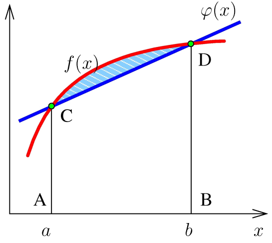


Wzór trapezów

Jeśli do interpolacji funkcji $f(x)$ zastosujemy interpolację za pomocą wielomianu liniowego zbudowanego na bazie Lagrange'a, to otrzymamy wzór kwadraturowy, nazywany **wzorem trapezów**.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b \left[f_0\, L_0^1(x) + f_1\, L_1^1(x) \right] \mathrm{d}x =$$

$$\int_a^b \left[f(a)\,\frac{x-b}{a-b} + f(b)\,\frac{x-a}{b-a} \right] = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b) \right] = S(f). \tag{2}$$



Wagi dla wzoru trapezów

Wagi $w_i,\ i = 0, 1$ występujące we wzorze trapezów można wyznaczyć rozwiązując układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - a \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{bmatrix}$$

skąd $w_0 = w_1 = \frac{1}{2}(b - a)$.

Wzór Simpsona

Zastosowanie kwadratowej interpolacji Lagrange'a prowadzi do wzoru kwadraturowego:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b \Big[\, f_0\, L_0 + f_1\, L_1 + f_2\, L_2 \Big]\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_a^b \left[f_0 \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f_1 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f_2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \right] dx$$

Ostatecznie **kwadratura (wzór) Simpsona** przyjmuje postać:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,h\,(f_0 + 4\,f_1 + f_2) = s(f), \quad h = \frac{b-a}{2} \tag{3}$$

Wagi dla wzoru Simpsona

Dla 3 węzłów równoodległych, tzn. gdy $c = 0.5 \cdot (a + b)$ współczynniki wagowe w_i, $i = 0, 1, 2$ we wzorze Simpsona oblicza się z układu równań:

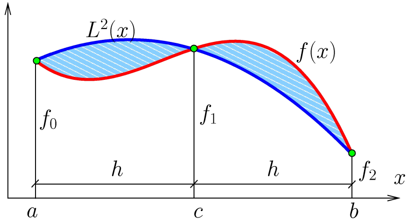
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & b \\ a^2 & c^2 & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - a \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy

$$w_0 = w_2 = \frac{b - a}{6}, \quad w_1 = \frac{2 \cdot (b - a)}{3}.$$

Wzór Simpsona

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,h\left(f_0 + 4\,f_1 + f_2\right) = s(f), \quad h = \frac{b-a}{2}$$



Uwaga:
Wzór Simpsona jest jest rzędu czwartego, co oznacza, że jest dokładny nie tylko dla wielomianów stopnia drugiego, lecz także dla wielomianów stopnia trzeciego tzn. $I(W_3) = S(W_3)$ oraz $I(W_4) \neq S(W_4)$.

Wzory Newtona-Cotesa

Zastosowanie wielomianów $\varphi(x)$ coraz to wyższych stopni we wzorze kwadraturowym prowadzi do tzw. **wzorów Newtona-Cotesa.**

$$S(W_k) = \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i) = S(f) \tag{4}$$

Dla wielomianów $\varphi(x)$ kolejnych stopni n wartości współczynników wagowych w_i otrzymuje się z rozwiązania układu równań.

Zestawienie współczynników wagowych

Wzory Newtona-Cotesa

W poniższej tablicy są zestawione wartości współczynników wagowych w_i :

n	w'_0	w'_1	w'_2	w'_3	w'_4	w'_5	m
1	1						2
2	1	4	1				6
3	1	3	3	1			8
4	7	32	12	32	7		90
5	19	75	50	50	75	19	228

Wartości wag występujące we wzorze (4) obliczane są według wzoru

$$w_i = \frac{w'_i}{m}$$

Uwaga:
Kwadratury Newtona-Cotesa uzyskane przy zastosowaniu wielomianów interpolujących $\varphi(x)$ stopni $n > 8$ ujawniają cechy narastajacej niestabilności kwadratury interpolacyjnej (3).

Wzór Gaussa

Do podwyższenia dokładność wzorów kwadraturowych można zastosować propozycję **Gaussa**, polegajaca na optymalizacji położenia n węzłów interpolacyjnych oraz doborze odpowiednich wartości współczynników wagowych. Można przyjąć, że we wzorze:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{5}$$

niewiadomymi są nie tylko współczynniki wagowe w_i ale także współrzędne węzłów x_i. Zatem równanie (5) zawiera $2(n+1)$ niewiadomych.

Kwadratura będzie dokładna gdy $f(x)$ będzie wielomianem co najwyżej stopnia $(2n+1)$. Wszystkie niewiadome można wyznaczyć z układu $2n+2$ równań dla $n+1$ wag w_i
oraz $n+1$ węzłów x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$.

Postać układu równań dla kwadratury Gaussa

Dla funkcji podcałkowej $f(x)$, która przyjmuje postać wielomianu zgodnie ze wzorem:

$$\int_a^b x^k \, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} w_i \, x_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, 2n+1$$

otrzymujemy układ równań:

$$\sum_{i=0}^{n} w_i \, x_i^k = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right), \; k = 0, 1, 2, \cdots, 2n+1 \tag{6}$$

który jest liniowy ze względu na wagi i nieliniowy ze względu na węzły.

Wzór kwadraturowy Gaussa w przedziale wzorcowym

Odwzorowanie przedziału $[a, b]$ na osi x na unormowany przedział $[-1, 1]$ na pomocniczej osi ξ i odwzorowanie do niego odwrotne można opisać za pomocą wzorów:

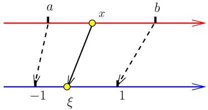
$$\xi = \frac{2x - a - b}{b - a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}\xi \qquad (7)$$

co daje wygodny sposób zapisu całki:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

oraz **wzoru kwadraturowego Gaussa**:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} \bar{w}_i\, f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\xi_i\right). \qquad (8)$$



Obliczanie współczynników dla wzoru Gaussa

Dla tej postaci wzoru wartości $\bar{w}_i$, ξ_i można obliczyć z układu równań

$$\int_{-1}^{1} \xi^k \, \mathrm{d}\xi = \sum_{i=0}^{n} \bar{w}_i \, \xi_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1. \tag{9}$$

Przykład:

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 + \alpha_4\xi^3\right) \mathrm{d}\xi$$

Wynik ścisły: $I = 2\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_3 = 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_3 + 0\alpha_4$

$$\begin{aligned} I &= w_0 f(\xi_0) + w_0 f(\xi_0) = \\ &= w_0 \left(\alpha_1 + \alpha_2\xi_0 + \alpha_3\xi_0^2 + \alpha_4\xi_0^3\right) + w_1 \left(\alpha_1 + \alpha_2\xi_1 + \alpha_3\xi_1^2 + \alpha_4\xi_1^3\right) = \\ &= (w_0 + w_1)\alpha_1 + (w_0\xi_0 + w_1\xi_1)\alpha_2 + (w_0\xi_0^2 + w_1\xi_1^2)\alpha_3 + (w_0\xi_0^3 + w_1\xi_1^3)\alpha_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= 2 \\ w_0\xi_0 + w_1\xi_1 &= 0 \\ w_0\xi_0^2 + w_1\xi_1^2 &= \tfrac{2}{3} \\ w_0\xi_0^3 + w_1\xi_1^3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow w_0 = w_1 = 1 \qquad \xi_{0,1} = \pm 1/\sqrt{3}$$

Tablica węzłów i wag Gaussa

n	$\xi_i, \quad i = 0, \cdots, n$	$\bar{w}_i, \quad i = 0, \cdots, n$
0	$\xi_0 = 0$	$\bar{w}_0 = 2$
1	$\xi_0 = +1/\sqrt{3}$ $\xi_1 = -1/\sqrt{3}$	$\bar{w}_0 = 1$ $\bar{w}_1 = 1$
2	$\xi_0 = +\sqrt{0.6}$ $\xi_1 = 0$ $\xi_2 = -\sqrt{0.6}$	$\bar{w}_0 = 5/9$ $\bar{w}_1 = 8/9$ $\bar{w}_2 = 5/9$
3	$\xi_0 = +0.86113631$ $\xi_1 = +0.33998104$ $\xi_2 = -0.33998104$ $\xi_3 = -0.86113631$	$\bar{w}_0 = 0.34785485$ $\bar{w}_1 = 0.65214515$ $\bar{w}_2 = 0.65214515$ $\bar{w}_3 = 0.34785485$

Uwaga:

Niezależnie od postaci funkcji $f(x)$

1^0 wartości wag w_i i węzłów Gaussa ξ_i są **zawsze takie same**,

2^0 zależą tylko od **liczby węzłów interpolacji** n.

Przykład

Zastosowanie wzorów kwadraturowych dla 1 przedziału

Obliczyć $S(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ gdy $f(x) = 4 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 1$ dla $a = -1.0$, $b = 1.0$, co oznacza, że $h = b - a = 2$, .

Rozwiązanie:

Przykładowy tok postępowania – dwupunktowa metoda Gaussa ($n = 1$):

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{1} w_i\, f(\xi_i) =$$

$$\frac{b-a}{2}\Big[f\Big(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}0.5773502692\Big) +$$

$$f\Big(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}0.5773502692\Big)\Big] = 5.33333$$

Przykład

Wyniki dla prezentowanych wzorów

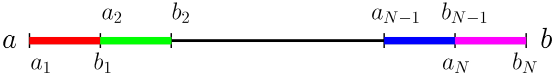
Wartość dokładna $I(f) = 5.3333$

Wzór	Postać kwadratury		Wartość
prostokątów:			
lewych	$S(f) = h \cdot f(a)$	$=$	4
środkowych	$S(f) = h \cdot f(\frac{a+b}{2})$	$=$	2
prawych	$S(f) = h \cdot f(b)$	$=$	20
trapezów	$S(f) = \frac{h}{2} \cdot [f(a) + f(b)]$	$=$	12
Simpsona	$S(f) = \frac{1}{3}\frac{h}{2} \cdot [f(a) + 4 \cdot f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$	$=$	5.3333
Gaussa dla $n = 1$	$S(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{1} w_i f(\xi_i)$	$=$	5.3333

Podział przedziału całkowania na podprzedziały

Bardzo skutecznym sposobem podwyższania dokładności całkowania numerycznego jest dokonanie podziału przedziału $[a, b]$ na podprzedziały $[a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \ldots, N$ przy zachowaniu związków:

$$a_1 = a, \quad b_N = b, \quad b_i = a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$



Można zapisać:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} f(x)\,\mathrm{d}x = I_1(f) + I_2(f) + \cdots + I_N(f)$$

Każda z całek oznaczonych $I_j(f)$, wystepujacych we wzorze różni się od od całek $I(f)$ tylko wartościami granic całkowania.

Do obliczania każdego składnika sumy można posłużyć się dowolnym wzorem kwadraturowym.

Metoda prostokątów

Gdy długości wszystkich podprzedziałów $[a_j, b_j]$ są sobie równe czyli $b_j - a_j = H, \quad j = 1, 2 \ldots, N, \quad H = \frac{b-a}{N}$, to możemy określić wzory sumacyjne. Przedział całkowania $< a, b >$ dzielimy na N równych podprzedziałów $< x_0, x_1 >, < x_1, x_2 >, \cdots < x_{n-1}, x_n >$ gdzie $H = (b - a)/N$. W każdym z nich stosujemy wzór złożony:

(a) **lewych prostokątów**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx H \cdot \sum_{j=1}^{N} f(x_{j-1}) = H \cdot (f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1})$$

(b) **środkowych (średnich) prostokątów**

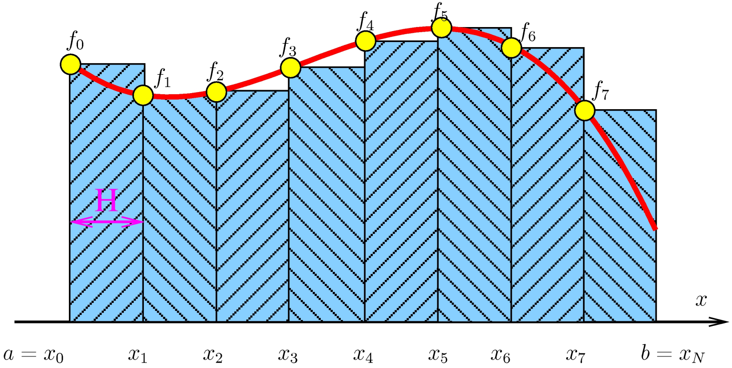
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx H \cdot \sum_{j=1}^{N} f(\frac{x_j - x_{j-1}}{2}) = H \cdot (f_{01} + f_{12} + f_{23} + \cdots + f_{N-1\,N})$$

gdzie $f_{j-1\,j} = f\left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N,$

(c) **prawych prostokątów**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx H \cdot \sum_{j=1}^{N} f(x_j) = H \cdot (f_1 + f_2 + \cdots + f_N)$$

Ilustracja metody prostokątów lewych



Algorytm metody prostokątów

funkcja $[pr_l,\ pr_p,\ pr_s\ ] = MetodaProstokatow\ (a, b, N)$
$H = \frac{b-a}{N}$
$pr_l = pr_p = pr_s = 0$
dla $j = 0, 1, \ldots N-1$ **wykonaj**
    $x_l = a + j \cdot H, \quad pr_l = pr_l + f(x_l)$
    $x_p = x_l + H, \quad pr_p = pr_p + f(x_p)$
    $x_s = \frac{x_l + x_p}{2}, \quad pr_s = pr_s + f(x_s)$
koniec dla
$pr_l = pr_l \cdot H, \quad pr_p = pr_p \cdot H, \quad pr_s = pr_s \cdot H$
koniec funkcji

Wywołanie funkcji:

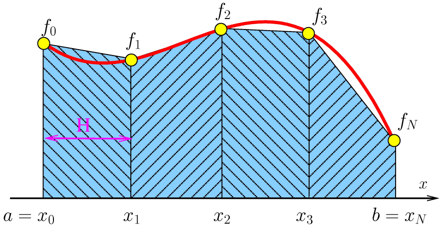
$$[Le, Pr, Sr] = MetodaProstokatow(a, b, N)$$

Metoda trapezów

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}H \cdot \sum_{j=1}^{N} \left[f(x_{j-1} + f(x_j) \right] = H \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \cdots + \frac{f_N}{2} \right)$$

lub

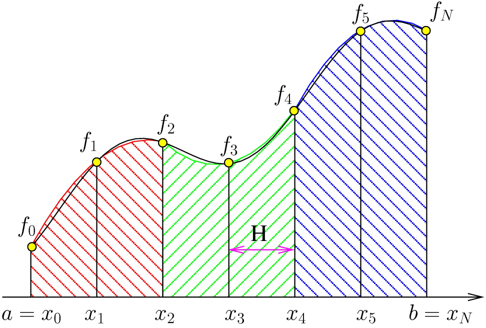
$$\int_a^b f(x)dx \approx H \cdot \left[\frac{1}{2} f_0 + \sum_{j=1}^{N-1} f_j + \frac{1}{2} f_N \right]$$



Metoda Simpsona

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3} H \cdot \Big[\left(f_0 + f_N \right) + 4 \left(f_1 + f_3 + \cdots + f_{N-1} \right) + 2 \left(f_2 + f_4 + \cdots + f_{N-2} \right) \Big],$$

przy czym $H = (x_N - x_0)/N$ i N **musi być liczbą parzystą**.



Zastosowanie kwadratury Gaussa

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{lpc} w_i\, f(X_i).$$

gdzie $$X_i = \frac{x_j + x_{j+1}}{2} + \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \cdot \xi_i$$

Tablica węzłów Gaussa $\xi = [\,0.555555555,\ 0.88888888,\ 0.555555555\,]$
Tablica wag $w = [\,-0.77459667,\ 0.0,\ 0.77459667\,]$
Wywołanie funkcji:

$$[Ga] = MetodaGaussa(a, b, N, tabWag, tabWez)$$

Przykład – podsumowanie

Oblicz $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$ gdzie $f(x) = 4 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 + 1.$

Przyjmij $a = -5,\ b = 5,\ N = 3.$

1: **funkcja** $[y] = f(x)$
2: $y = 4 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 + 1$
3: **koniec funkcji**

Metoda	Wynik
prostokątów lewych	6465.761317
prostokątów prawych	10632.427984
prostokątów średnich	3302.181070
trapezów	8549.094650
Simpsona	5051.152263
Gaussa 3pkt	5009.999985
dokładne	5010.000000