Ćwiczenia 9.04.2020 r.

Omówię przykład (z: Janus, Myjak…) o obliczeniach postaci kanonicznej wraz z zastosowaniem:

PRZYKŁAD 4.5. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_{xy} = 0, \tag{4.18}$$

spełniające warunki początkowe

$$u(x,0) = 3x^2, \quad u_y(x,0) = 0.$$

Równanie charakterystyk ma postać

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

stąd

$$\frac{dy}{dx} = -1 \quad \text{oraz} \quad \frac{dy}{dx} = 3.$$

Charakterystykami równania (4.21) są rodziny prostych

$$x + y = C_1, \quad 3x - y = C_2.$$

Komentarze i uzupełnienia. Zauważmy po kolei:

$a_{11}(x,y) = 1$, $a_{12}(x,y) = 1$ (a nie 2!!) , $a_{22}(x,y) = -3$, wyznacznik

$$\Delta(x,y) = -(a_{11}\, a_{22} - a_{12}{}^2) = 4 \text{ (hiperboliczne na całej płaszczyźnie).}$$

Równanie charakterystyk – zawiera oczywiście współczynnik „-2", gdyż z postaci (przypomnę z postu): dla danej całki pierwszej g(x,y(x)) mamy
dg(x,y(x)) = g_x + g_y dy/dx = 0.

Stąd dy/dx = - g_x/g+y i po podstawieniu do równania pojawi się

$$a_{11}(x,y)\,(dy)^2 - a_{12}(x,y)\, dy\, dx + a_{22}(x,y)\,(dx)^2 = 0\,.$$

Uzyskamy takie równanie j.w. Podstawiamy t = dy/dx i uzyskamy:

$$t^2 - 2t - 3 = 0\,.$$

Liczymy klasycznie pierwiastki (delta = 4 + 12 = 16 = 4Δ(x,y) – i tak musiało być!!)

$t_1 = (2 + 4)/2 = 3$, $t_2 = (2 - 4)/2 = -1$.

Czyli
dy/dx = 3 , dy/dx = -1
dy = 3dx , dy = -dx
$y = 3x + C_1$, $y = -x + C_2$
Całki pierwsze: $u_1(x,y) = 3x - y$ oraz $u_2(x,y) = x + y$ ← tak jak na grafice powyżej.

Podstawienie:

W celu sprowadzenia równania do postaci kanonicznej wprowadzamy nowe zmienne

$$\xi = x + y, \quad \eta = 3x - y.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
u_x &= w_\xi + 23w_\eta, \quad u_y = w_\xi - w_\eta, \\
u_{xx} &= w_{\xi\xi} + 6w_{\xi\eta} + 9w_{\eta\eta}, \\
u_{xy} &= w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} - 3w_{\eta\eta}, \\
u_{yy} &= w_{\xi\xi} - 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Podstawiając uzyskane wielkości do równania wyjściowego otrzymamy

$$w_{\xi\eta} = 0$$

Całkując jak w poprzednim przykładzie ostatnie równanie otrzymamy

$$w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy C^1. Wracając do zmiennych wyjściowych otrzymamy

$$u(x, y) = F(x + y) + G(3x - y). \tag{4.19}$$

Zauważmy: w nowych zmiennych równanie dało się całkować metodą bezpośredniego całkowania (a nie musi tak być – nawet w postaci kanonicznej).

Szukamy teraz funkcji F i G tak aby były spełnione warunki początkowe, czyli

$$u(x, 0) = F(x) + G(3x) = 3x^2,$$

$$u_y(x, 0) = F'(x) - G'(3x) = 0.$$

I taki układ równań powinien dać się jednoznacznie rozwiązać (o ile metoda d'Alemberta ma działać!!). Raczej (to moja opinia) nie różniczkujemy obustronnie żadnego równania, tylko całkujemy, tak, aby były 2 równania zawierające funkcje F i G. Autorzy preferują jednak różniczkowanie: porównam obie metody. Najpierw różniczkowanie (tu są skróty obliczeniowe):

Z równań

$$F'(x) + 3G'(3x) = 6x, \quad F'(x) - G'(3x) = 0,$$

otrzymamy

$$G'(3x) = \frac{3}{2}x,$$

a przyjmując $t = 3x$ mamy

$$G'(t) = \frac{1}{2}t$$

czyli

$$G(t) = \frac{1}{4}t^2 + C.$$

Teraz obliczamy drugą funkcję:

Wykorzystując ponownie pierwszy warunek początkowy oraz ostatnią relacje otrzymamy

$$F(x) = 3x^2 - G(3x) = 3x^2 - \frac{9}{4}x^2 - C = \frac{3}{4}x^2 - C$$

Musimy wyrugować C z obu równań (zauważmy, ze da się to zrobić) i mamy:

Podstawiając uzyskane wartości do wzoru (4.22) otrzymamy szukane rozwiązanie

$$u(x,y) = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(3x-y)^2.$$

OK. …………………

-- A teraz rekomendowane całkowanie obustronne:

$$F(x) + G(3x) = 3x^2 \quad , \quad F'(x) - G'(3x) = 0 .$$

Całkujemy obustronnie drugie równanie w granicach od (pewnego) x_0 do x :

$$\int_{x_0}^{x} (F'(s) - G'(3s))\, ds = \int_{x_0}^{x} 0\, ds = 0$$

$$F(x) - F(x_0) - \frac{1}{3}G(3x) + \frac{1}{3}G(3x_0) = 0.$$

Wyliczamy z pierwszego (nie całkowanego) równania np. $F(x) = 3x^2 - G(3x)$. Podstawiamy:

$$3x^2 - G(3x) - F(x_0) - \frac{1}{3}G(3x) + \frac{1}{3}G(3x_0) = 0$$

$$\frac{4}{3}G(3x) = -F(x_0) + \frac{1}{3}G(3x_0) + 3x^2$$

Mnożymy obustronnie przez ¾ i wstawiamy t = 3x, czyli x = 1/3 t :

$$G(t) = -\frac{3}{4}F(x_0) + \frac{1}{4}G(3x_0) + \frac{1}{4}t^2$$

(tak przy okazji: poprzednio było jakieś „C", to jest ono jawnie zależne od wyboru początkowego punktu całkowania).

Wyliczamy F(x):

$$F(x) = F(x_0) + \frac{1}{3}G(3x) - \frac{1}{3}G(3x_0)$$

I po wstawieniu – najlepiej G(3x) (patrz wyżej):

$$F(x) = \frac{3}{4}F(x_0) - \frac{1}{4}G(3x_0) + \frac{3}{4}x^2 .$$

To nadal zawiera dowolna wielkość x_0 , ale rozwiązanie jest postaci u(x,y) =F(x+y) +G(3x-y), czyli po podstawieniu wielkości związane z x_0 skrócą się (w tej metodzie: muszą, albo się nie stosuje…):

$$u(x,y) = ¾\, (x+y)^2 + ¼\, (3x-y)^2 .$$