0.1 Zagadnienie Sturma-Liouville'a:

Problem spektralny dla operatorów. Bardzo krótko, więc możliwe uproszczenia tematu... Ogólna postać badanego równania:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = -\lambda y(x)$$

z pewnymi warunkami brzegowymi...

Postać do obliczeń wartości własnych (kanoniczna lub inaczej: postać Sturma-Liouville'a). Dla tych, którzy wolą poszukać informacji w formie operatorowej - lewa strona to $\mathcal{L}(y)$ z pewnym operatorem (powinien być hermitowski) $\mathcal{L}$, tu $\mathcal{L}(y) = ay'' + by' + cy$. Zbiór wartości własnych operatora nazywamy jego widmem, badamy tzw. regularne zagadnienia Sturma-Liuoville'a, czyli posiadające dyskretne widmo, a dla których zbiór funkcji własnych jest układem zupełnym w badanej przestrzeni funkcyjnej. W badanych przez nas równaniach cząstkowych oznacza to konieczność badania warunku, jaki musi spełniać λ (np. znak).

Można to więc zapisać w postaci

$$[p(x)y'(x)]' + [q(x) + \lambda r(x)]y(x) = 0$$

(czyli $\mathcal{L}(y) = \lambda \cdot r \cdot y$ w pewnej przestrzeni wagowej z wagą r) .

Sprowadzenie do tej postaci pozwala np. sprawdzić regularność badanego równania: jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy $p(x) > 0$ i $r(x) > 0$ w całym badanym zbiorze.

Twierdzenie: *Jeżeli zagadnienie Sturma-Liouville'a jest regularne, to wartości własne są dyskretne i można je uporządkować w ciąg rosnący* $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$ *taki, że* $\lambda_n \to \infty$ *dla* $n \to \infty$ *oraz jednej wartości własnej odpowiada tylko jedna funkcja własna unormowana.*

Uwaga: my będziemy stosować tę teorię dla kilku najprostszych przypadków, np. równań struny czy Laplace'a. Powstają wtedy dość proste równania II rzędu, często o stałych współczynnikach.

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (y')' + \lambda y = 0$$

czy

$$xy'' + y' + \lambda y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (xy')' + \lambda y = 0.$$

Nie są to - niestety - jedyne możliwości. Teoria obejmuje nawet takie równania II rzędu jak Bessela

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (xy')' + (x - \frac{\nu^2}{x})y = 0$$

czy Legendre'a

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ((1 - x^2)y')' + \nu(\nu + 1)y = 0,$$

a oba posiadają układy fundamentalne rozwiązań składające się z tzw. funkcji specjalnych (Bessela i Lagrange'a, odpowiednio...). I do równań cząstkowych, dla których po rozdzieleniu zmiennych powstają takie właśnie równania zwyczajne da się stosować metodę Fouriera. Nawet więcej: jeśli istnieje zamiana zmiennych (czynnik całkujący), po której równanie przyjmie taką postać, to metoda może być skuteczna.

Przykładowe zadanie. Zbadać równanie (w otoczeniu $x_0 = 1$):

$$4xy'' + 2y' - \lambda y = 0$$

Zadanie własne dla Czytelników: przeprowadzić te równanie do postaci Sturma-Liouville'a (wsk. znaleźć wzory na podstawienie lub rozwiązać układ równań (postać ogólna) = (postać S-L po wykonaniu różniczkowania), układ polega na przyrównaniu funkcji przy pochodnych tego samego rzędu, ale uwaga: po pomnożeniu obustronnym przez pewną funkcję... Obliczamy np.

$$(p(x)y'(x))' = y''(x)p(x) + p'(x)y'(x) = a(x)y''(x) + b(x)y'(x)$$

itd.

Zadania.

1. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami brzegowymi:

$$u'' + u = 0, \qquad u(0) = 0, \;\; u(L) = 0.$$

Oczywiście funkcja $u(x) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia. Czy jest to jedyne rozwiązanie? Czy odpowiedź zależy od L?

2. Zagadnienie:
$$y'' - 2y' + \lambda y = 0 \qquad , \qquad y(0) = 0\ ,\ y(\pi) = 0.$$
Równanie proszę zapisać jako: $\frac{d}{dx}[e^{-2x}y'] + e^{-2x}\lambda y = 0$ (postać Sturma-Liouville'a!! - sprawdzić) i proszę go rozwiązać.

3. Dla jakich wartości λ zagadnienie
$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$
ma nietrywialne rozwiązanie?

4. Rozwiąż zagadnienie brzegowe
$$u'' = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) + ku(0) = 0, \quad u'(1) \pm ku(1) = 0$$
dla każdej stałej k. Rozważaj przypadki $+$ i $-$ osobno. Dlaczego przypadek z $k = 2$ jest wyróżniony?

5. Znajdź wartości własne i odpowiadające im funkcje własne zagadnienia
$$X^{(4)} - \lambda X = 0 \qquad , \qquad X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0.$$

6. Znajdź wartości własne i odpowiadające im funkcje własne zagadnienia
$$X^{(4)} = \lambda X \qquad , \qquad X(0) = X'(0) = X(1) = X'(1) = 0.$$

7. Rozdzielając zmienne rozwiąż równanie
$$tu_t = u_{xx} + 2u$$
z warunkami brzegowymi
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$
Udowodnij, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy
$$u(x,0) = 0.$$
Tak więc, w tym przypadku brak jest jednoznaczności rozwiązań!

8. Sprawdź, że $u(x,y) = f(x)g(y)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego $uu_{xy} = u_x u_y$ dla dowolnych funkcji f, g klasy $C^{(1)}$ jednej zmiennej.

9. Funkcje hiperboliczne są zdefiniowane następujaco:

$$\sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \quad , \quad \cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}.$$

Sprawdź, że $u_n(x,y) = \sin nx \cdot \sinh ny$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

10. Rozwiąż równanie dyfuzji

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1,$$

z mieszanym warunkiem brzegowym: $u(0,t) = u_x(1,t) = 0$ i warunkiem początkowym $u(0,x) = g(x)$ z odpowiednio dobraną funkcją g.

11. Znajdź metodą bezpośredniego całkowania funkcję $u = u(x,y)$ spełniającą równanie oraz podane warunki brzegowe:

a) $u_{xx} = 6x;$ $\quad u(0,y) = y, \quad u(1,y) = y^2 + 1,$

b) $yu_{yy} + u_y = 0,$ $\quad u(x,1) = x^2, \quad u(x,e) = 1,$

c) $u_{xx} + 2u_x = 0,$ $\quad u(0,y) = 1, \quad u(1,y) = 1/(e^2).$

12. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$3u_y + u_{xy} = 0.$$

Czy istnieje **jedyne** rozwiązanie przy dodatkowych warunkach

$$u(x,0) = e^{-3x}, \; u_y(x,0) = 0 \qquad ?$$

13. Znajdź rozwiązanie równania Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

na prostokącie: $0 < x < a$, $0 < y < b$ spełniające następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} u_x &= -a \quad \text{dla} \quad x = 0, \\ u_x &= 0 \quad \text{dla} \quad x = a, \\ u_y &= b \quad \text{dla} \quad y = 0, \\ u_y &= 0 \quad \text{dla} \quad y = b. \end{aligned}$$

Proszę zignorować warunki zgodności w wierzchołkach prostokąta. Rozwiązać metodą Fouriera - inna metoda będzie omówiona przy okazji równania Poissona.