0.1 Równania eliptyczne.

Równanie Laplace'a

$$\Delta u = 0, \qquad x \in \Omega$$

oraz równanie Poissona

$$\Delta u + f = 0, \qquad x \in \Omega,$$

gdzie u jest szukaną funkcją określoną na obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_d}$, a f jest zadaną funkcją. Równania te spotykamy w różnych modelach matematycznych. Trzy klasyczne przykłady nie wyczerpują zastosowań:

(A) **Rozchodzenie się ciepła**. Zjawisko rozchodzenia się ciepła jest opisane równaniem

$$u_t - \Delta u = 0.$$

W przypadku pola stacjonarnego, tzn. takiego, że rozkład temperatury nie zmienia się w czasie, funkcja u nie zależy od czasu i spełnia równanie Laplace'a, a jeśli występują przy tym źródła ciepła, to spełnia ona równanie Poissona, z funkcją f opisującą źródła ciepła.

(B) **Ruch cieczy**. Przypuśćmy, że w pewnym ograniczonym obszarze występuje ruch cieczy nieściśliwej o prędkości v. Jeśli ruch cieczy jest bezwirowy, to prędkość v ma potencjał φ. Jeśli ponadto pole jest bezźródłowe, to $\Delta\varphi = 0$, czyli potencjał φ ustalonego pola elektrycznego spełnia wówczas równanie Laplace'a.

(C) **Pole elektrostatyczne**. Przypuśćmy, że dane jest pole elektrostatyczne ładunków stacjonarnych i niech $\rho(x, y, z)$ oznacza gęstość objętościową ładunków. Potencjał elektrostatyczny pola φ spełnia wówczas równanie Poissona $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. A gdy brak jest ładunków przestrzennych ($\rho = 0$), to potencjał spełnia nawet równanie Laplace'a.