prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Rozwiązanie równania struny metodą d'Alemberta

Rozważmy równanie struny (hiperboliczne)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \tag{1}$$

w obszarze $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t>0\}$ spełniające warunki początkowe:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

gdzie φ i ψ są ustalonymi funkcjami.

Równanie charakterystyk w naszym przypadku ma postać

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0.$$

Jak już **wiemy** (równania hiperboliczne - postacie kanoniczne równań liniowych), prowadzi to do dwóch równań

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dx}{dt} = -a,$$

i dwóch całek pierwszych $u_1(t,x) = x - at, \quad u_2(t,x) = x + at$. Stosujemy podstawienie

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

co sprowadzi równanie wyjściowe do postaci

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Całkując względem η otrzymamy

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 + f(\xi) = f(\xi),$$

a następnie całkując względem ξ otrzymamy

$$w(\xi,\eta) = \int f(\xi)\, d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy $C^{(2)}$. Wracając do zmiennych wyjściowych mamy

$$u(t,x) = F(x-at) + G(x+at). \tag{3}$$

Rozwiązania zadane odpowiednio funkcjami F i G nazywamy się falami prostymi i opisują one ruch fali w prawo i lewo, odpowiednio. Z warunków początkowych uzyskamy

$$u(0,x) = F(x) + G(x) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x).$$

Rozwiązując układ równań

$$F(x) + G(x) = \varphi(x) \quad , \quad -F'(x) + G'(x) = \frac{1}{a}\psi(x),$$

otrzymamy

$$G'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2a}\psi(x),$$

a wybierając dowolne x_0, po scałkowaniu w przedziale $[x_0, x]$ dostajemy

$$G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(x_0) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,ds + G(x_0).$$

na razie wzór wygląda na zależny od x_0, *musimy wykazać, że rozwiązanie nie zależy od tego wyboru.*

Wstawiamy uzyskany wzór do pierwszego równania:

$$F(x) = \varphi(x) - G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,ds + \frac{1}{2}\varphi(x_0) - G(x_0).$$

Teraz musimy podstawić wzory na F i G do (3) i uzyskamy:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at} \psi(s)\,ds + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} \psi(s)\,ds.$$

Kluczową uwagą jest *brak w otrzymanym wzorze stałej* x_0 wybieranej przez nas w dowodzie.

Wzór można oczywiście uprościć do postaci (tzw. **wzór d'Alemberta**)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds. \tag{4}$$

Ze powyższego wzoru wynika natychmiast, że rozwiązanie problemu struny zależy w sposób ciągły od warunków początkowych (jest stabilne): niech u_1 będzie rozwiązaniem równania (1) odpowiadającym warunkowi początkowemu φ_1 oraz prędkości początkowej ψ_1, a u_2 rozwiązaniem odpowiadającym warunkowi początkowemu φ_2 oraz prędkości początkowej ψ_2.

Wybierzmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}
|u_1(t,x) - u_2(t,x)| &\leqslant \left|\frac{1}{2}\Big(\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)\Big) - \frac{1}{2}\Big(\varphi_2(x-at) + \varphi_2(x+at)\Big)\right| \\
&+ \left|\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)\,ds - \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_2(s)\,ds\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)| + \frac{1}{2}|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)| \\
&+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(s) - \psi_2(s)|\,ds.
\end{aligned}$$

Jeżeli $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$, $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$ dla $x \in \mathbb{R}$, to

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \leqslant \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \delta \cdot t.$$

Dla $\delta + \delta t < \varepsilon$ uzyskamy definicję ciągłej zależności od warunków początkowych (*Tak przy okazji pytanie - czy punktowy warunek (norma supremalna): $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$ jest możliwy do osłabienia? Jak? A co z warunkiem na funkcję φ?*)

Z liniowości operacji różniczkowania wynika, że jeśli $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\psi = \psi_1 + \psi_2$, to rozwiązanie problemu struny możemy przedstawić jako sumę rozwiązań

$$u = u_1 + u_2,$$

gdzie u_1 jest rozwiązaniem równania struny spełniającym warunki początkowe

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi_1(x),$$

a u_2 jest rozwiązaniem równania struny spełniającym warunki początkowe

$$u(0,x) = \varphi_2(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi_2(x).$$

Konieczny jest **komentarz** o stosowalności tej metody. Pierwszym krokiem jest uzyskanie postaci kanonicznej, z której (na ogół metodą bezpośredniego całkowania) znajdujemy rozwiązanie ogólne. Przypomnę jednak, że nawet proste równania hiperboliczne w postaci kanonicznej nie muszą dać się całkować. Aby poszerzyć zakres działania metody d'Alemberta warto podać proste sposoby (dla niektórych postaci) pozwalające na znajdowanie rozwiązań ogólnych.

Rozpatrzmy równanie liniowe (hiperboliczne)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

Nie da się go całkować obustronnie. Zastosujmy jednak podstawienie

$$u(x,y) = v(x,y) \cdot e^{-x-y},$$

a po wyliczeniu pochodnych cząstkowych $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ (pochodna iloczynu) i wstawieniu do równania uzyskamy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

a te równanie da się już całkować. Nie zawsze jest więc łatwo określić czy metoda d'Alemberta ma zastosowanie. Uzyskamy

$$v(x,y) = F(x) + G(y) = u(x,u) \cdot e^{x+y}$$

z pewnymi F, G klasy $C^{(2)}$, a więc

$$u(x,y) = (F(x) + G(y)) \cdot e^{-x-y}.$$

Ćwiczenie 1: Powyższą metodą rozwiązać (jak się da!) równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

stosując poszukiwanie rozwiązania u w postaci

$$u(x,y) = \frac{v(x,y)}{x-y}.$$

Wskazówka (po zgłoszeniu problemu - dziękuję!): w uzyskanym równaniu zastosować rozdzielanie zmiennych $v(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$.

Ćwiczenie 2: Metody rozwiązywania pewnych równań bazują na powyższym pomyśle, ale wymagają (jak to w równaniach cząstkowych bywa...) dalszych kroków. Rozpatrzmy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{n}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{m}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ oraz u jest klasy $C^{(m+n+2)}$.

Oznaczmy przez z_{nm} rozwiązanie tego równania ze stałymi n, m. Zauważmy, że dla $n = m = 1$ znamy rozwiązanie (ćwiczenie wyżej), czyli

$$\frac{\partial^2 z_{11}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x-y}\frac{\partial z_{11}}{\partial x} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial z_{11}}{\partial y} = 0,$$

albo inaczej

$$(x-y)\frac{\partial^2 z_{11}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z_{11}}{\partial x} + \frac{\partial z_{11}}{\partial y} = 0.$$

Jeśli te ostatnie równanie różniczkujemy względem x (z założenia: wolno to robić - proszę to potraktować jako proste ćwiczenia), to (po uporządkowaniu wyrazów):

$$(x-y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial z_{11}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z_{11}}{\partial x}\right) + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z_{11}}{\partial x}\right) = 0.$$

I teraz można zauważyć, że to jest wyjściowe równanie dla $m = 2$!

W naszych oznaczeniach daje to

$$z_{12} = \frac{\partial z_{11}}{\partial x},$$

czyli

$$(x-y)\frac{\partial^2 z_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z_{12}}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial z_{12}}{\partial y} = 0.$$

I teraz część ćwiczeniowa: proszę powtórzyć tę operację różniczkując powyższy wzór ponownie względem x. Oczekiwany wynik (oczywiście - do sprawdzenia):

$$z_{13} = \frac{\partial z_{12}}{\partial x} = \frac{\partial^2 z_{11}}{\partial x^2}.$$

Można sprawdzić wzór wzór rekurencyjny:

$$z_{1m} = \frac{\partial^m z_{11}}{\partial x^m}.$$

Teraz - bez zaskoczenia, postępujemy podobnie, ale różniczkując obustronnie względem y (oczywiście: ćwiczenie samodzielne)...

Rozwiązanie:

$$z_{nm} = \frac{\partial^{n+m} z_{11}}{\partial x^m \partial y^n}$$

i z naszych założeń ta funkcja jest klasy $C^{(2)}$, a więc jest klasycznym rozwiązaniem tego równania.

Jak widać - zadanie dało się rozwiązać, choć nie ukrywajmy, że takie zadania wymagają już pewnej wprawy i znajomości sporej liczby pomysłów możliwych do zastosowania ("zauważmy, że..").