prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Całki pierwsze

Rozważmy równanie

$$x' = f(t, x), \qquad (t, x) \in \Omega, \tag{1}$$

gdzie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest zadaną funkcją, a $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ zbiorem otwartym. Oczywiście równanie to możemy zapisać we współrzędnych w postaci układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,\, x_1,\, , \dots,\, x_n), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t,\, x_1,\, \dots,\, x_n), \end{cases} \tag{2}$$

Funkcje $g : \Omega \to \mathbb{R}$ klasy $C^{(1)}$ nazywamy **całką pierwszą** układu równań (2) jeśli dla dowolnego rozwiązania $x_1 = x_1(t), \dots, \ x_n = x_n(t), \ \ t \in I,$ tego układu $g\big(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\big) = \text{const} \ \ \text{dla} \ \ t \in I$, tzn. funkcja g jest stała wzdłuż dowolnego rozwiązania układu równań (2). Co jest słabością tej definicji w zastosowaniach? Aby sprawdzić, czy funkcja jest całka pierwszą układu z definicji, trzeba by go rozwiązać! To niekiedy bywa trudniejsze (lub bardziej czasochłonne) niż znajdowanie samych całek pierwszych. Na szczęście ich znajdowanie nie będzie dla nas celem samym w sobie, tylko narzędziem do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych...

Całość prezentowanego materiału podzielimy na dwie części. W pierwszej podamy własności całek pierwszych, ułatwiające ich obliczanie i niezbędne do części drugiej - twierdzenia o związku całek pierwszych autonomicznego układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{3}$$

z rozwiązaniami równania różniczkowego cząstkowego

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial u}{\partial x_2} f_2(x_1, \dots, x_n) + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Część I. Jeśli znajdziemy już całkę pierwszą, to kolejnych możemy mieć niekończenie wiele. Jest tak, ponieważ korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej otrzymamy natychmiast następujący:

Lemat: Niech $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $C^{(1)}$, a g całką pierwszą układu (2). Wówczas, wprost z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej, złożenie $h \circ g$ jest również całą pierwszą układu (2).

Podobnie, jeśli funkcje $g_1, \ldots, g_m$ są całkami pierwszymi układu (2, a $h : R^m \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy $C^{(1)}$, to funkcja $h \circ (g_1, \ldots, g_m)$ jest również całką pierwszą układu (2).

Jeśli natomiast chcemy znaleźć **wszystkie**, to powyższa własność sprawia pewien problem. Aby go rozwiązać wprowadzamy nowe pojęcie.

Całki pierwsze $g_1, \ldots, g_m \in C^{(1)}(\Omega)$ ($m \leqslant n$) nazywamy (*funkcyjnie*) **niezależnymi** w zbiorze Ω, jeśli dla dowolnego punktu $(t, x) \in \Omega$ rząd macierzy jakobianu

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(t,\, x), \ldots, \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(t,\, x) \\ \vdots \ddots \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(t,\, x), \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(t,\, x) \end{bmatrix}$$

wynosi m tzn. w każdym punkcie $(t, x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ wiersze tej macierzy są wektorami liniowo niezależnymi. W szczególności, jeśli $m = n$ to wyznacznik powyższej macierzy jest różny od zera.

Całek niezależnych nie może być jednak dowolnie wiele. Poniższe twierdzenie orzeka ile. Mamy:

Twierdzenie. Załóżmy, że funkcje $f_1, \ldots, f_n$ układu równań (2) są funkcjami klasy $C^{(1)}$ w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Ponadto, załóżmy, że w pewnym otoczeniu punktu $(t_0, \overset{o}{x}) = \big(t_0, \overset{o}{x}_1, \ldots, \overset{o}{x}_n\ \big) \in \Omega$ takim, że

$$f_1(t_0, \overset{o}{x}) = 0,\ \ f_2(t_0, \overset{o}{x}) = 0, \ldots, f_n(t_0, \overset{o}{x}) = 0$$

istnieje n całek pierwszych (funkcyjnie) niezależnych $g_1, \ldots, g_n$ tego układu. Niech g będzie dowolną całką pierwszą układu (2) w tym otoczeniu. Wtedy istnieje taka funkcja F jest funkcją klasy $C^{(1)}$, że

$$g(t, x_1, \ldots, x_n) = F\big(g_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(t, x_1, \ldots, x_n)\big) \tag{4}$$

w pewnym otoczeniu punktu $(t_0, \overset{o}{x})$.

Dowód: Dla $(t_0, x) \in \Omega$ rozwiązanie φ układu (2) spełniające warunek $\varphi(t_0) = x$ oznaczmy symbolem $\varphi(\,\cdot\,; t_0, x)$. Oczywiście $\varphi(t_0; t_0, x) = x$. Rozpisując ostatnią równość po współrzędnych otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0; t_0, x_1, \ldots, x_n) = x_1, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \varphi_n(t_0; t_0, x_1, \ldots, x_n) = x_n. \end{cases} \tag{5}$$

Zauważmy, że

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(t_0; t_0, x_1, \ldots, x_n) \ldots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(t_0; t_0, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \ddots \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(t_0; t_0, x_1, \ldots, x_n) \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(t_0; t_0, x_1, \ldots, x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \ldots 00 \\ \vdots\vdots \ddots \vdots\vdots \\ 00 \ldots 01 \end{vmatrix} = 1.$$

Punkty rozpatrywane w naszym założeniu, tj. spełniające warunki $f_1(t_0, \overset{o}{x}) = 0$, $f_2(t_0, \overset{o}{x}) = 0$, ... $f_n(t_0, \overset{o}{x}) = 0$ nazywać dalej będziemy punktami równowagi układu.

Załóżmy, że $(t_0, \overset{o}{x}) \in \Omega$ nie jest punktem równowagi układu (2).

Niech $I \times U$ będzie otoczeniem punktu $(t_0, \overset{o}{x})$ tak dobranym, że dla każdego $(t, x) \in I \times U$ rozwiązanie $\varphi(\,\cdot\,; t, x)$ jest określone w punkcie t_0. Ponadto, ponieważ funkcje w powyższym wyznaczniku są ciągłe, możemy otoczenie to dobrać tak, aby

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(t_0; t, x_1, \ldots, x_n) \ldots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(t_0; t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \ddots \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(t_0; t, x_1, \ldots, x_n) \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(t_0; t, x_1, \ldots, x_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

dla $(t, x) \in I \times U$. Oznacza to, że funkcje $\varphi_1(t_0; \cdot, \cdot), \ldots, \varphi_n(t_0; \cdot, \cdot)$ są (funkcyjnie) niezależne w zbiorze $I \times U$. Przy przyjętych założeniach o funkcjach $f_1, \ldots, f_n$ - dzięki twierdzeniu Picarda (bo z założeń wynika w szczególności warunek Lipschitz'a) - przez każdy punkt $(t, x) \in I \times U$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie $\varphi(\,\cdot\,; t, x)$ układu (2). Ponadto, jeśli $y = \varphi(s; t, x)$, to $x = \varphi(t; s, y)$, $s \in I$. Dla $(t, x) \in I \times U$ połóżmy $\tilde{x} = \varphi(t_0; t, x)$.

Zgodnie z powyższymi obserwacjami wartość $\tilde{x}$ jest stała na każdej całce (tzn. jeśli Γ jest wykresem całki układu (2) to $\varphi(t_0; t, x) = \text{const.}$ dla dowolnego $(t, x) \in \Gamma$).

Zatem dla dowolnego $s \in I$ mamy

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0; s, \varphi(s; t, x))) = \varphi_1(t_0; s, y) = \varphi_1(t_0; t, x) &= \tilde{x}_1, \\ &\vdots \\ \varphi_n(t_0; s, \varphi(s; t, x))) = \varphi_n(t_0; s, y) = \varphi_n(t_0; t, x) &= \tilde{x}_n, \end{aligned}$$

gdzie $y = \varphi(s; t, x)$.

Wynika stąd, że funkcje $\varphi_1(t_0; \cdot, \cdot), \ldots, \varphi_n(t_0; \cdot, \cdot)$ są (funkcyjnie) niezależnymi całkami pierwszymi układu (2) na zbiorze $I \times U$. Połóżmy

$$g_i(s, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(t_0; s, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Oczywiście $g_1, \ldots, g_n$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu (2) na zbiorze $I \times U$.

Niech $g : I \times U \to \mathbb{R}$ będzie dowolną całką pierwszą układu (2). Ponieważ całka pierwsza jest stała wzdłuż dowolnego rozwiązania $x = x(s)$, $s \in I$, powtarzając rozumowanie dowodu warunku koniecznego twierdzenia otrzymamy dla $s \in I$ układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial s}(s, x(s)) + f_1(s, x(s))\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(s, x(s)) + \ldots + f_n(s, x(s))\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(s, x(s)) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial s}(s, x(s)) + f_1(s, x(s))\frac{\partial g_n}{\partial x_1}(s, x(s)) + \ldots + f_n(s, x(s))\frac{\partial g_n}{\partial x_n}(s, x(s)) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial s}(s, x(s)) + f_1(s, x(s))\frac{\partial g}{\partial x_1}(s, x(s)) + \ldots + f_n(s, x(s))\frac{\partial g}{\partial x_n}(s, x(s)) = 0. \end{cases}$$

Ponieważ dla dowolnego $s \in I$ powyższy układ posiada rozwiązanie niezerowe względem $1, f_1, \ldots, f_n$, zatem wyznacznik współczynników musi być równy zeru, czyli

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s}(s, x(s)) & \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(s, x(s)) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(s, x(s)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial s}(s, x(s)) & \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(s, x(s)) & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(s, x(s)) \\ \frac{\partial g}{\partial s}(s, x(s)) & \frac{\partial g}{\partial x_1}(s, x(s)) & \ldots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(s, x(s)) \end{vmatrix} = 0.$$

Z ostatniej równości wynika, że pochodne funkcji g są liniowo zależne od pochodnych funkcji $g_1, \ldots, g_n$. W konsekwencji istnieje F takie, że

$$g(t, x) = F(g_1(t_0; t, x), \ldots, g_n(t_0; t, x)),$$

gdzie F jest funkcją klasy $C^{(1)}$. □

Uwaga: każda całka g (na mocy lematu) generuje kolejne postaci $h \circ g$ (h klasy $C^{(1)}$), ale - jak łatwo wywnioskować z podanych wyników jeśli g_1 i g_2 są niezależne, to całki $h \circ g_1$ i $h \circ g_2$ pozostaną niezależne (nawet złożenia z innymi funkcjami h).

Rozważmy teraz układ autonomiczny

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,\, \dots,\, x_n), \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,\, \dots,\, x_n). \end{cases} \tag{6}$$

Załóżmy, że $f_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Dla $i = 1, \dots, n-1$ połóżmy

$$\tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{f_n(x_1, \dots, x_n)},$$

oraz $s = x_n$. Wówczas

$$\frac{\frac{dx_i}{dt}}{\frac{dx_n}{dt}} = \frac{dx_i}{dx_n} = \frac{dx_i}{ds}, \quad i = 1, \dots n-1.$$

Zatem układ możemy zapisać w formie:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds} = \tilde{f}_1(x_1,\, \dots,\, x_{n-1}, s), \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{ds} = \tilde{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, s). \end{cases} . \tag{7}$$

Zgodnie z poprzednim twierdzeniem, w otoczeniu dowolnego punktu nie będącego punktem równowagi, układ ten posiada $n-1$ funkcyjnie niezależnych całek pierwszych

$$g_1 = g_1(x_1, \dots, x_{n-1}, s), \dots, g_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, s).$$

Ponadto, jeśli g jest całką pierwszą w tym otoczeniu, to $g = F \circ (g_1, \dots, g_{n-1})$, gdzie F jest funkcją klasy $C^{(1)}$. Czyli jeśli (2) jest w szczególnej postaci, czyli układem autonomicznym tj. układem o postaci (6) (funkcje niezależne od zmiennej t) i ponadto $f_1 \neq 0$, (lub inna funkcja x_k), to układ ten można sprowadzić do równoważnego układu $n-1$ równań:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{f_n}{f_1}$$

(czyli x_1 pełni rolę zmiennej niezależnej) lub - w postaci symetrycznej:

$$\frac{dx_2}{\frac{f_2}{f_1}} = \frac{dx_3}{\frac{f_3}{f_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{f_n}{f_1}} = dx_1.$$

Zgodnie z Twierdzeniem, aby znaleźć **wszystkie całki pierwsze tego układu**, wystarczy znaleźć $(n-1)$ całek pierwszych niezależnych. Niestety, nie zawsze będzie to łatwe...

Od tej pory interesować nas będą JEDYNIE układy autonomiczne!

Część II. Pokażemy, że (pod pewnymi warunkami) każde rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego liniowego jednorodnego (8) j

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{8}$$

jest całką pierwszą odpowiadającego mu układu równań (nazywanego układem równań charakterystyk):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{9}$$

Następnie wystarczy wykazać, że istnieje zależność odwrotna (nadal pewne założenie są niezbędne)... W praktyce obliczeniowej: znaleźć rozwiązanie ogólne równania (8) = znaleźć wszystkie całki pierwsze układu (9).

Twierdzenie. Załóżmy, że $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, a funkcje $f_k : D \to \mathbb{R}$ będą klasy $C^{(1)}$ nie będące tożsamościowo równe zeru. Dla dowolnego punktu $a \in D$ istnieje takie jego otoczenie Ω, że w tym otoczeniu istnieje układ $(n-1)$ niezależnych całek pierwszych układu (9): $u_1(x)$, ... , $u_{n-1}(x)$. Wówczas dowolne rozwiązanie równania (8) można przedstawić w postaci

$$u(x) = F(u_1(x), u_2(x), ..., u_{n-1}(x)), \tag{10}$$

gdzie F jest pewną funkcją klasy $C^{(1)}$.

Na tym twierdzeniu bazuje metoda charakterystyk. Dla danego równania tworzymy układ równań charakterystyk, znajdujemy jego $(n-1)$ całek pierwszych niezależnych (każda z nich jest oczywiście rozwiązaniem równania). Rozwiązanie ogólne równania jest postaci (10), z dowolnie wybraną funkcją F klasy $C^{(1)}$ w danym otoczeniu Ω.

Jedyny "kłopot" to fakt, że istnienie układu $(n-1)$ całek pierwszych układu bazuje na twierdzeniu o funkcji uwikłanej, a wiec jest niekonstruktywne. Układ ten zapisujemy w postaci symetrycznej i staramy się znaleźć całki pierwsze.

1) Układ taki może składać się równań różniczkowych zwyczajnych i (o ile potrafimy) rozwiązujemy je znajdując całki pierwsze np.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Mamy dwa równania $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ i $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Rozwiązujemy je uzyskując

$$u_1(x, y, z) = \frac{x}{y}\ ,\ u_2(x, y, z) = \frac{y}{z}.$$

Są niezależne (proszę sprawdzić!!), czyli rozwiązanie ogólne równania jest postaci

$$u(x, y, z) = F(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$$

z funkcjami F klasy $C^{(1)}$ w odpowiednim otoczeniu (uwaga na dziedziny całek pierwszych!).

2) Układ równań charakterystyk może być w postaci, w której nie są to odrębne równania różniczkowe, ale sprowadza się do równań zwyczajnych wyższych rzędów. Bardzo prosty przykład:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Układ równań charakterystyk to $x' = y$, $y' = x$, czyli $y'' = x'$ i stąd $y'' = y$. Te równanie drugiego rzędu o stałych współczynnikach ma rozwiązanie $y(t) = Ae^t + Be^{-t}$, czyli $x(t) = y'(t) = Ae^t - Be^{-t}$. rugując parametr t uzyskamy $C = y^2 - x^2$, a więc (jedyna poszukiwana) całka pierwsza to $u_1(x, y) = y^2 - x^2$, a rozwiązanie ogólne jest postaci

$$u(x, y) = F(y^2 - x^2)$$

dla funkcji F klasy $C^{(1)}$.

3) W pozostałych przypadkach można dobierać tzw. współczynniki nieoznaczone (metoda opisana odrębnie), w celu dopisania do układu kolejnych wyrażeń, które mogą umożliwić zastosowanie powyższych metod.

4) Niekiedy, gdy znana jest pewna liczba całek pierwszych (ale nie wszystkie niezależne), możemy skorzystać z jej różniczki zupełnej, wstawić do układu i uzyskać którąś z postaci 1) lub 2).

UWAGA: praktycznie każdy przykład można rozwiązać na kilka metod. Nawet w ramach przyjętej metody może być kilka dróg prowadzących do poprawnego rozwiązania, np. wiele układów współczynników nieoznaczonych w tym samym zadaniu. Proszę nigdy nie sugerować się rozwiązaniami podawanymi przez autorów (moimi też), tylko szukać swoich metod. Bardzo podoba mi się w tym ujęciu skrypt Janus J., Myjak J., "Wprowadzenie do Równań Różniczkowych Cząstkowych", ze względu na przedstawianie rozwiązań kilkoma sposobami - polecam!