prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Metoda Fouriera dla równania Laplace'a na kole - obliczenia.

Rozważmy równanie Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

z warunkiem brzegowym Dirichleta

$$u(x, y) = f(x, y), \qquad (x, y) \in \partial\Omega, \tag{2}$$

gdzie $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < r^2\}$.

Wyrażenie

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

zwane jest *laplasjanem* funkcji $f(x, y)$ (równanie $\Delta f = 0$ nazywamy *równaniem Laplace'a*). Rozpatrując laplasjan Δf w obszarze D rozłącznym z osią OX (mamy jednoznaczność kątów: $\varphi \in (0, 2\pi)$) zapisać go współrzędnych biegunowych. Wprowadzamy takie współrzędne

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

i obliczmy

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi,$$

skąd transformacja odwrotna to

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Powyższe związki różniczkujemy względem x i y:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi, \tag{3}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r\sin\varphi}{r} = \sin\varphi, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \tag{5}$$

$$= -\frac{r\sin\varphi}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$(6)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\varphi}{r^2}=\frac{\cos\varphi}{r}\,.$$

Ze wzorów na pochodne cząstkowe funkcji złożonej

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,.$$

Uwzględniając (3), (5) otrzymujemy

$$(8)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,.$$

Podstawmy w powyższym wzorze w miejsce f wyrażenie $\dfrac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Stosujemy jeszcze raz wzór (8):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right.\\
&\quad-\left.\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)-\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\\
&= \cos^2\varphi\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)-\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right)\\
&\quad+\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\\
&= \cos^2\varphi\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\cos\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{r^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi}\right)\\
&\quad-\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\left(-\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial r}+\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r}\right)+\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\left(\frac{\cos\varphi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right).
\end{aligned}$$

Po uwzględnieniu równości pochodnych mieszanych oraz uporządkowaniu wyrażeń otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned}
(9)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2\varphi\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\\
&\quad+\frac{\sin^2\varphi}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,.
\end{aligned}$$

Obliczymy teraz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Ze wzorów na pochodne cząstkowe funkcji złożonej

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,$$

skąd po uwzględnieniu wzorów (4), (6)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \tag{10}$$

Podstawmy w powyższym wzorze $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ w miejsce f :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&\overset{(10)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&\overset{(10)}{=} \sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&+ \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \\
&= \sin\varphi\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi}\right) \\
&+ \frac{\cos\varphi}{r}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \sin\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right).
\end{aligned}$$

Po uwzględnieniu równości pochodnych mieszanych oraz uporządkowaniu wyrażeń otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&+ \frac{\cos^2\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Dodając teraz stronami wzory (9) i (11) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r}.
\end{aligned}$$