**prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń**

## 0.1 Metoda Fouriera dla równania Laplace'a na kole.

Rozważmy równanie Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

z warunkiem brzegowym Dirichleta

$$u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega, \tag{2}$$

gdzie $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 < r^2\}$.

Ponieważ potrafimy rozwiązywać równanie Laplace'a na prostokącie, to mamy tu do czynienia z przypadkiem obszaru, który można przekształcić przez pewne podstawienie na prostokąt. Niestety, równanie w nowych zmiennych z pewnością będzie inne niż równanie Laplace'a (ale: eliptyczne). Sprawdzimy, czy da się zastosować do niego metodę Fouriera. Postać obszaru $\Omega$ sugeruje możliwość skorzystania ze współrzędnych biegunowych

$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\sin\alpha, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant r,\ \ 0 \leqslant \alpha < 2\pi.$$

**Uwaga:** taka sama sytuacja będzie (to może nawet bardziej naturalne), gdy spojrzymy na problem jako określony na w funkcjach zespolonych dla $z = x+iy$, $\Omega = \{z : |z| < r\}$ i będziemy szukali rozwiązania jako części rzeczywistej takiego problemu zespolonego. Przypomnę, że funkcja harmoniczna może być znaleziona jako część rzeczywista pewnej funkcji holomorficznej. Wtedy mamy funkcję holomorficzną (analityczną) na kole, a więc daną poprzez (zespolony) szereg potęgowy

$$u(\rho,\alpha) = Re(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cdot (a_n \cos n\alpha - b_n \sin n\alpha),$$

gdzie proponowane "podstawienie" oznacza $\rho = |z|$, $\alpha = Arg\ z$ jest argumentem głównym liczby $z$.

Przyjmując $v(\rho,\alpha) = u(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ i korzystając z zależności: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, można obliczyć wszystkie pochodne w nowych zmiennych, w szczególności (po dłuższych obliczeniach...):

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{x^2}{\rho^2}v_{\rho\rho} - \frac{2xy}{\rho^3}v_{\rho\alpha} + \frac{y^2}{\rho^4}v_{\alpha\alpha} + \frac{y^2}{\rho^3}v_\rho + \frac{2xy}{\rho^4}v_\alpha, \\ u_{yy} &= \frac{y^2}{\rho^2}v_{\rho\rho} + \frac{2xy}{\rho^3}v_{\rho\alpha} + \frac{x^2}{\rho^4}v_{\alpha\alpha} + \frac{x^2}{\rho^3}v_\rho - \frac{2xy}{\rho^4}v_\alpha. \end{aligned}$$

Podstawiając ostatnie związki do równania (1) otrzymamy równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych

$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\alpha\alpha} = 0. \tag{3}$$

Warunek (2) przyjmie postać

$$v(r, \alpha) = g(\alpha), \qquad \alpha \in [0, 2\pi),$$

gdzie $g(\alpha) = f(r\cos(\alpha), r\sin(\alpha))$.

Brakuje nam warunków brzegowych? Ponieważ funkcje są $2\pi$-okresowe ze względu na $\alpha$, to mamy dodatkowo

$$v(\rho, 0) = v(\rho, 2\pi)$$

oraz oczywiście $v(0, \alpha) = 0$. Zestaw warunków do równania (3) na brzegu prostokąta będzie postaci

$$\rho = 0 \Rightarrow v(0,\alpha) = 0 \quad , \quad \rho = r \Rightarrow \quad v(r,\alpha) = g(\alpha)$$
$$\alpha = 0, \alpha = 2\pi \;\Rightarrow\; v(\rho, 0) = v(\rho, 2\pi). \tag{4}$$

Szukamy rozwiązania o zmiennych rozdzielonych

$$v(\rho,\, \alpha) = \phi(\rho) \cdot \psi(\alpha).$$

Po podstawieniu ostatniego wzoru do równania (3 i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\rho^2 \frac{\phi''(\rho)}{\phi(\rho)} + \rho \frac{\phi'(\rho)}{\phi(\rho)} = -\frac{\psi''(\alpha)}{\psi(\alpha)}. \tag{5}$$

Jak już wielokrotnie mogliśmy zauważyć, równość ta może zachodzić tylko wówczas gdy obie strony są równe pewnej stałej, powiedzmy $\lambda$. Otrzymujemy zatem równania różniczkowe:

$$\psi''(\alpha) + \lambda\psi(\alpha) = 0 \tag{6}$$

oraz

$$\rho^2\phi''(\rho) + \rho\phi'(\rho) - \lambda\phi(\rho) = 0. \tag{7}$$

Pierwsze z nich już napotkaliśmy i możemy sprawdzić, że dla $\lambda \geqslant 0$ nie mamy regularnego zagadnienia Sturma-Liouville'a.

Dla przypadku $\lambda < 0$ rozwiązanie równania (6) ma postać

$$\psi(\alpha) = A_1 e^{i\sqrt{-\lambda}\alpha} + B_1 e^{i\sqrt{-\lambda}\alpha} = A\cos(\sqrt{-\lambda}\alpha) + B\sin(\sqrt{-\lambda}\alpha). \tag{8}$$

Ponieważ $\psi$ jest funkcją okresową o okresie $2\pi$, to $\sqrt{-\lambda}$ musi być liczbą naturalną, czyli $-\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Zatem $\psi(\alpha) = A\cos(n\alpha) + B\sin(n\alpha)$.

Teraz drugie z równań. Tu będzie pewien problem z rozwiązaniem ogólnym. Na szczęście istotne są dla nas tylko rozwiązania radialne, tj. stałe w punktach na okręgu o ustalonym promieniu. Szukamy więc rozwiązań równania (7) tylko w postaci

$$\phi = \rho^k \quad \text{gdzie} \;\; k \in \mathbb{N},$$

i po dwukrotnym różniczkowaniu oraz podstawieniu do (7) otrzymamy $\big(k(k-1)+k-n^2\big)\rho^k = 0$ *(pytanie do czytelników: jakie to jest równanie? Było już o tym w jednym z poprzednich materiałów).*

Stąd $k = n$ lub $k = -n$. Rozwiązanie równania (7) ma zatem postać

$$\phi(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}.$$

Ponieważ dla $\rho = 0$ wyraz $\rho^{-n}$ nie jest określony i ponadto $\lim_{\rho\to 0^+} \rho^{-n} = \infty$, aby uniknąć osobliwości w początku układu należy przyjąć $D = 0$. W konsekwencji dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ funkcja

$$v_n(\rho,\alpha) = \psi_n(\alpha)\cdot\phi_n(\rho) = \rho^n\big(A_n\cos(n\alpha) + B_n\sin(n\alpha)\big)$$

jest rozwiązaniem klasy $C^2$ równania (3) (nowe stałe $A_n$ i $B_n$ uwzględniają już iloczyn $A\cdot C$, $B\cdot C$, wstawiamy też wartości własne $\lambda_n$ do funkcji.

Takie rozwiązanie nie spełnia, na ogół, warunku (5). Jak zawsze w metodzie Fouriera rozważmy więc funkcje będące szeregiem Fouriera względem układu funkcji własnych wyznaczonych z poprzedniego równania (tu: klasyczny trygonometryczny szereg Fouriera)

$$v(\rho,\alpha) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\big(A_n\cos(n\alpha) + B_n\sin(n\alpha)\big).$$

I znowu zakładamy, że ostatni szereg oraz szereg pochodnych pierwszego i drugiego rzędu jest jednostajnie zbieżny. Wtedy tak określona funkcja $v$ jest rozwiązaniem równania (3). Warunek (5) przyjmuje postać

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\big(A_n\cos(n\alpha) + B_n\sin(n\alpha)\big) = g(\alpha).$$

Jeśli funkcja $g$ jest rozwijalna w szereg Fouriera, to ostatnia równość jest spełniona dla współczynników obliczonych wzorami Eulera-Fouriera:

$$A_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta,\;\; n = 0,1,2,\ldots$$

Zatem

$$\begin{aligned} v(\rho,\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_0^{2\pi}\Big(\cos(n\alpha)\cos(n\theta)+\sin(n\alpha)\sin(n\theta)\Big)g(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos(n(\theta-\alpha))\Big)g(\theta)\,d\theta. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru $\cos(\beta)=\dfrac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} 1 &+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos(n(\theta-\alpha)) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n e^{in(\theta-\alpha)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n e^{-in(\theta-\alpha)} \\ &= 1+\frac{\frac{\rho}{r}e^{i(\theta-\alpha)}}{1-\frac{\rho}{r}e^{i(\theta-\alpha)}}+\frac{\frac{\rho}{r}e^{-i(\theta-\alpha)}}{1-\frac{\rho}{r}e^{-i(\theta-\alpha)}}=\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}. \end{aligned}$$

Uwzględniając ostatnią równość rozwiązanie $v$ możemy zapisać w postaci całkowej Poissona (wzór całkowy Poissona dla funkcji harmonicznej w kole):

$$v(\rho,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2-\rho^2)g(\theta)}{r^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)+\rho^2}d\theta.$$

Dla $\rho=0$ oraz $\alpha=0$ ostatni wzór daje zależność

$$v(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta.$$

Uzyskana równość mówi, że wartość średnia rozwiązania po brzegu kuli o środku w punkcie $(0,0)$ jest równa wartości rozwiązania w tym punkcie.

Pamiętajmy też o warunkach zbieżności szeregów Fouriera, rodzajach zbieżności i twierdzeniu o różniczkowalności szeregów funkcyjnych... Warto dodać, że rozwiązanie jest stabilne (por. poprawność postawienia problemu) - z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych.

**Uwaga:** ten przykład pokazuje bardziej **ogólną regułę**.
Jeżeli dany obszar $\Omega$ da się sprowadzić przez podstawienie do prostokąta, a same równanie w tych nowych zmiennych wraz z (nowymi) warunkami brzegowymi da się rozwiązać metodą Fouriera, to postępując jak w powyższej sytuacji znajdziemy szereg Fouriera dla rozwiązania. Poszerzamy więc kategorię zagadnień z równaniami eliptycznymi, które da się rozwiązać metodą Fouriera rozdzielania zmiennych. Niestety - nadal daleko nie wszystkie obszary pozwalają na takie podstawienia i często trzeba sięgać po nowe metody, w tym przybliżone (np. metoda siatek w oparciu o schematy różnicowe czy metoda szeregów potęgowych).