0.1 Uwagi o zagadnieniu Dirichleta na pierścieniu.

Rozważmy równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

z warunkiem brzegowym Dirichleta na pierścieniu kołowym

$$u(x,y) = f_a(x,y) \text{ dla } x^2 + y^2 = a^2 \tag{2}$$
$$u(x,y) = f_b(x,y) \text{ dla } x^2 + y^2 = b^2. \tag{3}$$

gdzie $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a^2 < x^2 + y^2 < b^2\right\}$.

Tak jak w przypadku prostokąta - uwagi przedstawimy dla pierścienia wyznaczonego przez okręgi o środku w $(0,0)$, w innym przypadku (środek dowolny (x_0, y_0)) wystarczy dokonać przesunięcia $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, równanie nie ulegnie zmianie i otrzymamy nasz przypadek.

Jak już ustaliliśmy, potrafimy rozwiązywać równanie Laplace'a na prostokącie, to też mamy tu do czynienia z przypadkiem obszaru, który można przekształcić przez pewne podstawienie na prostokąt. Rrównanie w nowych zmiennych z pewnością będzie inne niż równanie Laplace'a (ale nadal eliptyczne). Postać obszaru Ω sugeruje możliwość skorzystania ze współrzędnych biegunowych

$$x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho \sin\alpha, \qquad a \leqslant \rho \leqslant b, \; 0 \leqslant \alpha < 2\pi,$$

a to oznacza, że równanie uzyskane przy badaniu zagadnienia Dirichleta dla koła nie zmieni się. Zmianie ulegną jedynie warunki brzegowe. Skorzystamy z wcześniejszego wyprowadzenia równania w nowych zmiennych:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = 0. \tag{4}$$

Mamy w nowych zmiennych "prostokąt: $P = \{(\rho, \alpha) : 0 \leqslant \alpha < 2\pi \;,\; a \leqslant \rho \leqslant b\}$. Warunek (2) przyjmie postać

$$v(a, \alpha) = g_a(\alpha), \qquad \alpha \in [0, 2\pi),$$

$$v(b,\alpha) = g_b(\alpha), \qquad \alpha \in [0, 2\pi),$$

gdzie $g_a(\alpha) = f_a(a\cos(\alpha), a\sin(\alpha))$, $g_b(\alpha) = f_b(b\cos(\alpha), b\sin(\alpha))$. Warunki na 2 brzegach prostokąta są dane. Na pozostałych dwóch nadal mamy zagadnienie okresowe: funkcje są 2π-okresowe ze względu na α, to mamy dodatkowo

$$v(\rho, 0) = v(\rho, 2\pi).$$

Zestaw warunków brzegowych do równania (4) na brzegu prostokąta będzie postaci

$$\begin{aligned} \rho = a \Rightarrow\ v(a,\alpha) = g_a(\alpha) \quad , \quad \rho = b \Rightarrow\ v(b,\alpha) = g_b(\alpha) \\ \alpha = 0, \alpha = 2\pi \ \Rightarrow\ v(\rho, 0) = v(\rho, 2\pi). \end{aligned} \tag{5}$$

Szukamy rozwiązania o zmiennych rozdzielonych - ale to już wiemy jak...

$$v(\rho,\, \alpha) = \phi(\rho) \cdot \psi(\alpha)...$$

....

Zauważmy, ze możemy próbować rozwiązywać taką metodą zagadnienie na obszarach, które można transformować na prostokąt w nowych zmiennych, ale pamiętajmy o 2 trudnościach do rozstrzygania w każdym przypadku: równanie w nowych zmiennych musi pozwalać na rozdzielanie zmiennych oraz warunki brzegowe (również w nowych zmiennych) muszą pozwolić na rozwiązanie zagadnienia własnego - ale to jednak metoda do przemyślenia w pewnych zagadnieniach.