prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Metoda Fouriera dla równania Laplace'a na prostokącie.

Rozważmy prosty przykład równania eliptycznego - równanie Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

z warunkiem brzegowym Dirichleta, gdy obszar Ω jest prostokątem. Całą procedurę pokażemy w przypadku prostokąta o 2 bokach zawartych w prostych $x = 0$ i $y = 0$:

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\}$$

(niektóre źródła w ogóle preferują: $a = b = 1$).

Dlaczego? Znacznie skrócą się pewne rachunki i postać końcowa rozwiązania. A czy nie stracimy na ogólności? Nie: mając inny prostokąt zawsze można wprowadzić nowe zmienne tak, aby środek układu był w jednym z wierzchołków prostokąta (translacje i obroty nie zmieniają równania Laplace'a! - proszę samodzielnie sprawdzić...).

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g_1(y), \\ u(a, y) &= g_2(y), \\ u(x, 0) &= f_1(x), \\ u(x, b) &= f_2(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Teraz rozpoczniemy od kolejnego uproszczenia zagadnienia, a w zasadzie rozkładu na prostsze i łatwiejsze do omówienia. Tak jak postępowaliśmy wcześniej rozpatrzmy rozwiązanie zagadnienia jako sumy $u = u_1 + u_2$*...*

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g_1(y) \\ u(a, y) &= g_2(y) \\ u(x, 0) &= 0 \\ u(x, b) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Przez u_1 oznaczmy rozwiązanie równania Laplace'a (1) z warunkami brzegowymi (3). Teraz drugie zagadnienie

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 \\ u(a, y) &= 0 \\ u(x, 0) &= f_1(x) \\ u(x, b) &= f_2(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia (tj. równania Laplace'a (1) z warunkami brzegowymi (4) przez u_2.

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $u = u_1 + u_2$ spełnia równanie Laplace'a

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= (u_1+u_2)_{xx} + (u_1+u_2)_{yy} \\ &= ((u_1)_{xx} + (u_1)_{yy}) + ((u_2)_{xx} + (u_2)_{yy}) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ta funkcja spełnia też warunki brzegowe (2):

$$\begin{aligned} u(0,y) &= u_1(0,y) + u_2(0,y) = g_1(y) + 0 = g_1(y), \\ u(a,y) &= u_1(a,y) + u_2(0,y) = g_2(y) + 0 = g_2(y), \\ u(x,0) &= u_1(x,0) + u_2(x,0) = 0 + f_1(x) = f_1(x), \\ u(x,b) &= u_1(x,b) + u_2(x,b) = 0 + f_2(x) = f_2(x). \end{aligned}$$

Rzeczywiście, po obliczeniu u_1 i u_2 funkcja u będzie szukanym rozwiązaniem.

Do obliczenia u_1 i u_2 wykorzystamy metodę Fouriera rozdzielania zmiennych. Rozpocznijmy od u_1. Szukamy rozwiązania w postaci iloczynu funkcji jednej zmiennej i zobaczymy, czy można rozdzielić zmienne: $u_1 = X(x) \cdot Y(y)$. Wstawiamy do równania:

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

czyli

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Ponieważ każda ze stron równania zawiera funkcję innej zmiennej, to obie strony muszą być stałe. Oznaczmy ją przez λ. Uzyskamy dwa równania zwyczajne II rzędu o stałych współczynnikach:

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{5}$$

oraz

$$Y'' + \lambda Y = 0. \tag{6}$$

Z warunków brzegowych (3) wynika, że

$$\begin{aligned} u(0,y) &= X(0) \cdot Y(y) = g_1(y) \\ u(a,y) &= X(a) \cdot Y(y) = g_2(y) \\ u(x,0) &= X(x) \cdot Y(0) = 0 \\ u(x,b) &= X(x) \cdot Y(b) = 0. \end{aligned}$$

Interesuje nas druga para warunków (pierwsze mogą nie być spełnione!). Aby zachodziło $X(x) \cdot Y(0) = 0$ musi być $Y(0) = 0$ (gdyby $X(x) \equiv 0$ to $u_1 \equiv 0$

i mamy sprzeczność z warunkami brzegowymi). Podobnie $Y(b) = 0$. Z pary równań (5) - (6) zagadnienie brzegowe tworzy więc te drugie. Uzyskamy

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad , \quad Y(0) = 0 \ , \ Y(b) = 0.$$

To z tego zagadnienia więc skorzystamy do znalezienia jego wartości własnych i funkcji własnych.

Wielomian charakterystyczny równania to $F(c) = c^2 + \lambda$, jego pierwiastki to $\sqrt{-\lambda}$ oraz $-\sqrt{-\lambda}$, a więc rozwiązanie ogólne to

$$Y(y) = A_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}y} + B_1 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

Dla jakich λ jest to zagadnienie Sturma-Liouville'a, czyli posiada ciąg wartości własnych? Z warunków brzegowych:

$$0 = Y(0) = A_1 + B_1 \quad , \quad 0 = Y(b) = A_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}b} + B_1 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}b}.$$

Stąd $B_1 = -A_1$ oraz z drugiego równania

$$A_1 \cdot (e^{\sqrt{-\lambda}b} - e^{-\sqrt{-\lambda}b}) = 0.$$

Ale $A_1 \neq 0$ (bo wówczas byłoby $B_1 = 0$, czyli $Y(y) \equiv 0$ i ponownie $u_1 \equiv 0$ - sprzeczność). Ostatecznie

$$e^{\sqrt{-\lambda}b} - e^{-\sqrt{-\lambda}b} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2\sqrt{-\lambda}b} = 1.$$

Dla $\lambda \leqslant 0$ ostatnia równość zachodzi tylko w jednym przypadku ($\lambda = 0$), a więc ciąg wartości własnych będzie mógł istnieć jedynie dla $\lambda > 0$. Wtedy mamy

$$e^{2i\sqrt{\lambda}b} = 1,$$

a więc $2\sqrt{\lambda}b = n\pi$ dla n całkowitych. Mamy ciąg wartości własnych

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4b^2} > 0$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Odpowiada im ciąg funkcji własnych

$$Y_n(y) = \tilde{A}_n \cdot e^{\sqrt{-\lambda_n}y} + \tilde{B}_n \cdot e^{-\sqrt{-\lambda_n}y} = \tilde{A}_n \cdot e^{i\frac{n\pi}{2b}y} + \tilde{B}_n \cdot e^{-i\frac{n\pi}{2b}y}.$$

Taka postać funkcji wymaga rozwijania funkcji w zespolone szeregi Fouriera (kto jest z tym zapoznany, może opuścić ciąg dalszy). Zazwyczaj rekomenduje się jednak zmianą postaci za pomocą wzorów Eulera $e^it = \cos t + i \sin t$ i wówczas funkcje własne przyjmą postać

$$Y_n(y) = A_n \cdot \cos\frac{n\pi}{2b}y + B_n \cdot \sin\frac{n\pi}{2b}y$$

(oczywiście stałe nadal są dowolne, choć formalnie inne niż w powyższym wzorze). Warto w tym przypadku od nowa przyjrzeć się warunkom brzegowym w tym zagadnieniu dla funkcji wyrażonych w postaci trygonometrycznej:

$$0 = Y_n(0) = A_n \cdot \cos \frac{n\pi}{2b} 0 + B_n \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} 0 = A_n \quad \Rightarrow \quad A_n = 0.$$

Ostatecznie funkcje własne to

$$Y_n(y) = B_n \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y$$

czyli będziemy rozwijali funkcje w trygonometryczny szereg Fouriera samych sinusów.

Teraz drugie z równań, czyli (6). Tu możemy znaleźć układ fundamentalny rozwiązań. Wielomian charakterystyczny to $F(c) = c^2 - \lambda$ o pierwiastkach $\sqrt{\lambda}$ i $-\sqrt{\lambda}$, a więc rozwiązanie ogólne to

$$X(x) = C \cdot e^{\sqrt{\lambda} x} + D \cdot e^{-\sqrt{\lambda} x}.$$

Wstawiając wartości własne z poprzedniego zagadnienia uzyskamy ciąg funkcji

$$X_n(x) = C_n \cdot e^{\sqrt{\lambda_n} x} + D_n \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n} x} = C_n \cdot e^{\frac{n\pi}{2b} x} + D_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{2b} x}.$$

Tu także nadal możemy pozostawić powyższą postać lub skorzystać ze wzorów na funkcje hiperboliczne i przejść (częste w zastosowaniach technicznych) do postaci

$$X_n(x) = \tilde{C}_n \cdot cosh \frac{n\pi}{2b} x + \tilde{D}_n \cdot sinh \frac{n\pi}{2b} x.$$

Teraz rozpatrzmy funkcje (przyjmiemy postać trygonometryczną dla Y_n i wykładniczą dla X_n)

$$v_n(x, y) = X_n(x) \cdot Y_n(y) = \left(C_n B_n \cdot e^{\frac{n\pi}{2b} x} + D_n B_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{2b} x} \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y.$$

Każda z tych funkcji jest więc rozwiązaniem równania Laplace'a oraz warunków brzegowych $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$. Na ogół nie są za to spełnione warunki $u(0, y) = g_1(y)$, $u(a, y) = g_2(y)$. Jak już wiemy będziemy teraz rozwijać funkcje g_1 i g_2 w szeregi Fouriera względem układu funkcji własnych X_n (czyli w szereg trygonometryczny samych sinusów) - oczywiście będziemy zakładać, że te funkcje mają takie szeregi Fouriera zbieżne jednostajnie wraz z pochodnymi do drugiego rzędu włącznie... Mamy

$$g_1(y) = \sum_{n-1}^{\infty} k_n \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y$$

oraz

$$g_2(y) = \sum_{n-1}^{\infty} l_n \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y,$$

gdzie ciągi współczynników (k_n) oraz (l_n) wyznaczamy ze wzorów Eulera-Fouriera (przypomnieć - samodzielnie).

Warunki brzegowe z tymi funkcjami będą mogły spełniać funkcje

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n B_n \cdot e^{\frac{n\pi}{2b}x} + D_n B_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{2b}x}\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y$$

dla odpowiednio dobranych współczynników $C_n B_n$ oraz $D_n B_n$ $(n \in \mathbb{N})$. jak już wiemy, należy porównać szeregi Fouriera funkcji u i funkcji g_1 oraz g_2. Dokładniej:

$$\begin{aligned} g_1(y) = u(0,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n B_n \cdot e^{\frac{n\pi}{2b}0} + D_n B_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{2b}0}\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n B_n + D_n B_n) \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y \end{aligned}$$

i stąd

$$\sum_{n-1}^{\infty} k_n \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n B_n + D_n B_n) \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y.$$

Czyli otrzymujemy:

$$k_n = C_n B_n + D_n B_n.$$

Drugi z warunków brzegowych daje

$$g_2(y) = u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n B_n \cdot e^{\frac{n\pi}{2b}a} + D_n B_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{2b}a}\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y.$$

Ponownie porównując współczynniki szeregów Fouriera uzyskamy:

$$l_n = C_n B_n \cdot e^{\frac{n\pi}{2b}a} + D_n B_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{2b}a}.$$

Mamy do rozwiązania układ równań (widać, dlaczego niekiedy autorzy rozpatrują $a = b = 1$!):

$$\begin{aligned} k_n &= C_n B_n + D_n B_n \\ l_n &= C_n B_n \cdot e^{\frac{n\pi a}{2b}} + D_n B_n \cdot e^{-\frac{n\pi a}{2b}}. \end{aligned}$$

To układ równań liniowych, łatwo go rozwiązujemy względem iloczynów

$$D_n B_n = \frac{l_n - k_n \cdot e^{\frac{n\pi a}{2b}}}{e^{-\frac{n\pi a}{2b}} - e^{\frac{n\pi a}{2b}}} =: d_n$$

oraz

$$C_n B_n = k_n - D_n B_n =: c_n$$

i wstawiamy je do rozwiązania u obliczając funkcję u_1 (*postać "wykładnicza", stąd takie, a nie inne współczynniki*):

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cdot e^{\frac{n\pi}{2b}x} + d_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{2b}x}\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y.$$

Teraz czas na obliczenia funkcji u_2. Korzystamy z poprzednich obliczeń, mamy te same równania

$$X'' - \lambda X = 0$$

oraz

$$Y'' + \lambda Y = 0,$$

szukamy rozwiązań postaci $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, ale tym razem z warunków brzegowych wynika, że

$$\begin{aligned} u(0,y) &= X(0) \cdot Y(y) = 0 \\ u(a,y) &= X(a) \cdot Y(y) = 0 \\ u(x,0) &= X(x) \cdot Y(0) = f_1(x) \\ u(x,b) &= X(x) \cdot Y(b) = f_2(x) \end{aligned}$$

Teraz jednak sytuacja jest inna! Rozumując jak poprzednio (*przepraszam za skrót!*) mamy $X(0) = 0$ oraz $X(a) = 0$, czyli zagadnieniem badanym w celu wyznaczenia wartości i funkcji własnych będzie pierwsze z równań z warunkami brzegowymi:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad , \quad X(0) = 0 \,, \; X(a) = 0.$$

Wielomian charakterystyczny równania jest inny niż w poprzednim przypadku: $F(c) = c^2 - \lambda$, jego pierwiastki to $\sqrt{\lambda}$ oraz $-\sqrt{\lambda}$, a więc rozwiązanie ogólne to

$$X(x) = A_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + B_1 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Dla jakich λ jest to zagadnienie Sturma-Liouville'a, czyli posiada ciąg wartości własnych? Z warunków brzegowych:

$$0 = X(0) = A_1 + B_1 \quad , \quad 0 = X(a) = A_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}a} + B_1 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}a}.$$

Stąd $B_1 = -A_1$ oraz z drugiego równania

$$A_1 \cdot (e^{\sqrt{\lambda}a} - e^{-\sqrt{\lambda}a}) = 0.$$

Ale $A_1 \neq 0$ (bo wówczas byłoby $B_1 = 0$, czyli $X(x) \equiv 0$ i ponownie $u_1 \equiv 0$ - sprzeczność). Ostatecznie

$$e^{\sqrt{\lambda}a} - e^{-\sqrt{\lambda}a} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2\sqrt{a\lambda}b} = 1.$$

Tym razem dla $\lambda \geqslant 0$ ostatnia równość zachodzi tylko w jednym przypadku ($\lambda = 0$), a więc ciąg wartości własnych będzie mógł istnieć jedynie dla $\lambda < 0$. *zauważmy, że to wyklucza znajomość "z góry" znaku tak obliczanej stałej - w* *tym samym równaniu uprzednio była stała dodatnia, w tym zastawie warunków brzegowych - ujemna. Dlatego polecam każdorazowo to sprawdzać.* Mamy więc

$$e^{2i\sqrt{-\lambda}a} = 1,$$

a więc $2\sqrt{-\lambda}a = n\pi$ dla n całkowitych. Uzyskamy ciąg wartości własnych

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{4a^2} < 0$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Odpowiada im ciąg funkcji własnych

$$X_n(x) = \tilde{A}_n \cdot e^{i\sqrt{-\lambda_n}x} + \tilde{B}_n \cdot e^{-i\sqrt{-\lambda_n}x} = \tilde{A}_n \cdot e^{i\frac{n\pi}{2a}x} + \tilde{B}_n \cdot e^{-i\frac{n\pi}{2a}x}.$$

I znowu okazuje sie być przydatna postać trygonometryczna, a funkcje własne przyjmą wówczas postać

$$X_n(x) = A_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{2a} + B_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{2a}.$$

także w tym przypadku warto w tym przypadku od nowa przyjrzeć się warunkom brzegowym w tym zagadnieniu dla funkcji wyrażonych w postaci trygonometrycznej:

$$0 = X_n(0) = A_n \cdot \cos\frac{n\pi}{2a}0 + B_n \cdot \sin\frac{n\pi}{2a}0 = A_n \quad \Rightarrow \quad A_n = 0.$$

Ostatecznie funkcje własne to

$$X_n(x) = B_n \cdot \sin\frac{n\pi}{2a}x$$

czyli ponownie będziemy rozwijali funkcje w trygonometryczny szereg Fouriera samych sinusów!

Teraz drugie z równań, czyli (5). I tym razem w tym równaniu nie mamy warunków brzegowych, czyli możemy znaleźć tylko układ fundamentalny rozwiązań. Wielomian charakterystyczny to $F(c) = c^2 + \lambda$ o pierwiastkach $\sqrt{-\lambda}$ i $-\sqrt{-}\lambda$, a więc rozwiązanie ogólne to

$$Y(y) = C \cdot e^{\sqrt{-\lambda}y} + D \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

Wstawiając wartości własne z poprzedniego zagadnienia uzyskamy ciąg funkcji

$$Y_n(y) = C_n \cdot e^{\sqrt{\lambda_n}y} + D_n \cdot e^{-\sqrt{\lambda_n}y} = C_n \cdot e^{\frac{n\pi y}{2a}} + D_n \cdot e^{-\frac{n\pi y}{2a}}.$$

Tu także nadal możemy pozostawić powyższą postać lub skorzystać ze wzorów na funkcje hiperboliczne.

Teraz rozpatrzmy funkcje (przyjmiemy postać trygonometryczną dla X_n i zachowamy wykładniczą dla Y_n)

$$v_n(x,y) = X_n(x) \cdot Y_n(y) = \left(C_nB_n \cdot e^{\frac{n\pi y}{2a}} + D_nB_n \cdot e^{-\frac{n\pi y}{2a}}\right) \cdot \sin\frac{n\pi x}{2a}.$$

Teraz każda z funkcji jest rozwiązaniem równania Laplace'a oraz warunków brzegowych $u(0,y) = 0$, $u(a,y) = 0$. Na ogół nie są za to spełnione warunki $u(x,0) = f_1(x)$, $u(x,b) = f_2(x)$. Zakładać więc będziemy, że funkcje f_1 i f_2 są rozwijalne w szeregi Fouriera względem układu funkcji własnych Y_n (czyli ponownie w szereg trygonometryczny samych sinusów) i zakładać będziemy, że te funkcje mają takie szeregi Fouriera zbieżne jednostajnie wraz z pochodnymi do drugiego rzędu włącznie... Uzyskamy:

$$f_1(x) = \sum_{n-1}^{\infty} p_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{2a}$$

oraz

$$f_2(x) = \sum_{n-1}^{\infty} q_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{2a},$$

gdzie ciągi współczynników (p_n) oraz (q_n) wyznaczamy ze wzorów Eulera-Fouriera. Warunki brzegowe z tymi funkcjami będą mogły spełniać funkcje

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n B_n \cdot e^{\frac{n\pi y}{2a}} + D_n B_n \cdot e^{-\frac{n\pi y}{2a}} \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{2a}.$$

dalsza procedura jest taka sama jak w poprzednim przypadku: wstawiamy taką funkcję u do warunków brzegowych, rozwiązujemy układ równań obliczając $c_n = C_n B_n$ i $d_n = D_n B_n$ w zależności of p_n i q_n (jak poprzednio) i wstawiamy do wzoru uzyskując funkcję u_2:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cdot e^{\frac{n\pi y}{2a}} + d_n \cdot e^{-\frac{n\pi x}{2a}} \right) \cdot \sin \frac{n\pi y}{2a}.$$

Proszę zauważyć, że jeśli nie opuszczamy zbyt wielu obliczeń, to zadanie takie jest długie. Dlatego często autorzy podają zadnia ćwiczebne z jedną tylko niezerową funkcją w warunkach brzegowych, co istotnie skraca rachunki, a sprawdza znajomość całej metody.

0.2 Uwagi o stosowaniu metody do równań rzędu wyższego.

Jak już podkreślałem, ile razy spełnione będą założenia stosowalności metody, można próbować ją użyć do rozwiązywania zagadnień dla innych równań. Tu tylko krótki przykład.

Rozważmy zagadnienie **belki drgającej**, które jest opisane równaniem rzędu czwartego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad 0 < x < l, \ \ t > 0 \tag{7}$$

o zadanych warunkach początkowych: $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 < x < l$, oraz warunkach brzegowych: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $u_{xx}(0,t) = 0$, $u_{xx}(l,t) = 0$ $t>0$.

Szukamy rozwiązania w postaci $u(x,y) = T(t)X(x)$.

Po podstawieniu do równania i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy równość

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{a^2 T(t)},$$

co daje nam dwa równania zwyczajne

(i już wiemy, po co w zadaniach badaliśmy wartości własne równań zwyczajnych czwartego rzędu...)

$$X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0 \quad , \quad T'' + a^2 \lambda T = 0.$$

I badamy dalej...