

0.1 Metody dyskretne.

O metodach numerycznych dla równań cząstkowych Ogólnie rzecz biorąc, metody numeryczne dla równania Poissona i innych równań cząstkowych można podzielić na następujące typy:

1. **Metoda różnic skończonych (siatek).** W równaniu zastępujemy pochodne w operatorze różniczkowym przez wzory przybliżone, np.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u_{i-1} + u_{i+1} - u_i}{h^2}.$$

Otrzymujemy układ równań liniowych względem u_i , który rozwiązujemy. Jest to układ nazywany “rzadkim”, bo zdecydowana przy dużej liczbie równań, większość współczynników będzie zerami. Metoda najczęściej stosowana na siatce regularnej (prostokątnej). Wadą jest regularność siatki oraz wolna zbieżność. Obliczeniowo: konieczność stosowania algebry liniowej na macierzach rzadkich.

2. **Metoda elementów skończonych.** Stosujemy tzw. słabą postać równania i rozwiązujemy ją dla funkcji próbnych ze zwartymi nośnikami. Metoda nadaje się do sformułowania na siatkach nieregularnych i na takich jest najbardziej wartościowa.. Wolna zbieżność metody.

Doskonały przegląd metod równań różniczkowych cząstkowych (poza kursem, dla zainteresowanych!!) i stan badań w XX i XXI wieku: “Równania różniczkowe cząstkowe na przełomie XX i XXI wieku”, P. Biler

<https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/wiadomosci-matematyczne/article/view/4943>

0.2 Schematy różnicowe.

Kto ma orientację w temacie - niech opuści ten podrozdział...

Punktem wyjścia jest definicja pochodnej i jej dyskretyzacja:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h}.$$

Stąd przybliżenie:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \simeq \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h}.$$

Będziemy ustalać krok metody h (dla ułatwienia przyjmiemy tu przyrost h po każdej zmiennej taki sam, choć niekiedy nie jest to stosowane - jeśli to korzystne) i operować jedynie na punktach **siatki**, czyli startując z punktu (x, y) obliczenia będą jedynie na punktach:

$$u_{0,0} = u(x, y), u_{1,1} = u(x + h, y + h), u_{1,2} = u(x + h, y + 2h), u_{1,3} = u(x + h, y + 3h), \dots, u_{2,1} = u(x + 2h, y + h), u_{3,1} = u(x + 3h, y + h), \dots, u_{-1,1} = u(x - h, y + h), \dots \text{ itd.}$$

—> proszę zrobić rysunek!!

Skoro przyrosty mają być tylko w wartościach siatki, to przyjmiemy

$$(u_x)_{0,0} := \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \simeq \frac{u_{1,0} - u_{0,0}}{h}$$

albo krótko

$$(u_x)_{0,0} \cdot h \simeq u_{1,0} - u_{0,0}.$$

Tak naprawdę przyjęliśmy powyżej, że $h > 0$, czyli jest to pochodna prawostronna. Dla lewostronnej uzyskalibyśmy inną dyskretyzację

$$(u_x)_{0,0} \cdot h \simeq u_{-1,0} - u_{0,0}.$$

Te wzory stosuje się na ogół jedynie przy brzegu obszaru, gdy jeden z węzłów leży na tym brzegu, a więc **znamy** tę wartość z warunku brzegowego! Na ogół warto symetryzować wzór (ponieważ jeśli istnieje pochodna cząstkowa, to da się ją wyznaczyć jako średnia arytmetyczną pochodnych jednostronnych). Optymalny (?) wzór to:

$$(u_x)_{0,0} \cdot h \simeq 1/2u_{-1,0} - u_{0,0} + 1/2u_{1,0}.$$

Teraz identycznie postępujemy z wszystkimi kolejnymi pochodnymi! Zauważmy, że można to krótko zapisać w postaci wektora lub macierzy: $(1/2, -1, 1/2)$. Dla pochodnej $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ i innych pochodnych mieszanych będzie to macierz.

Algorytm:: w danym równaniu różniczkowym cząstkowym:

1. ustalamy krok h i punkty siatki,
2. zastępujemy wszystkie pochodne (lub czasami cały operator różniczkowy jako całość) przez ich dyskretyzację oparte na punktach siatki,
3. w punktach brzegowych siatki, w których warunki brzegowe zadają nam pewne znane wartości zastępujemy w schematach wartości $u_{i,k}$ przez dane z warunku brzegowego,
4. powstaje (algebraiczny) układ równań (liniowych - o ile równanie różniczkowe cząstkowe było liniowe) - jest tyle równań, ile węzłów siatki wewnątrz obszaru i tyle samo niewiadomych,

5. rozwiązujemy układ równań,

6. jego rozwiązanie daje nam (przybliżone) rozwiązanie równania w punktach siatki.

Nadal jest *sporo problemów*, ale nie będziemy tu wszystkiego omawiać: np. co jeśli obszar jest nieregularny i (prawie) żaden z punktów siatki nie leży na brzegu? Jak aproksymować te wartości? Czy siatka musi być prostokątna? Czy operatory dyskretne mają takie same własności jak ciągłe (np. czy dyskretny operator Laplace'a spełnia zasadę maksimum)?

Ćwiczenie. Proszę samodzielnie znaleźć kilka takich wzorów dla wybranych przez siebie pochodnych cząstkowych (polecam rysunki).

Klasyczna macierz dyskretna operatora Laplace'a jest postaci (por. [Ombach]):

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tj.

$$(\Delta_h u)_{k,i} \simeq \frac{u_{k,i-1} + u_{k,i+1} + u_{k-1,i} + u_{k+1,i} - 4u_{k,i}}{h^2}.$$

Załóżmy, że Ω jest otwartym, ograniczonym i wypukłym podzbiorem \mathbb{R}^2 . Ustalmy $h > 0$ (szerokość siatki) rozważmy punkty postaci:

$$(x_m, y_n) = (m \cdot h, n \cdot h), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

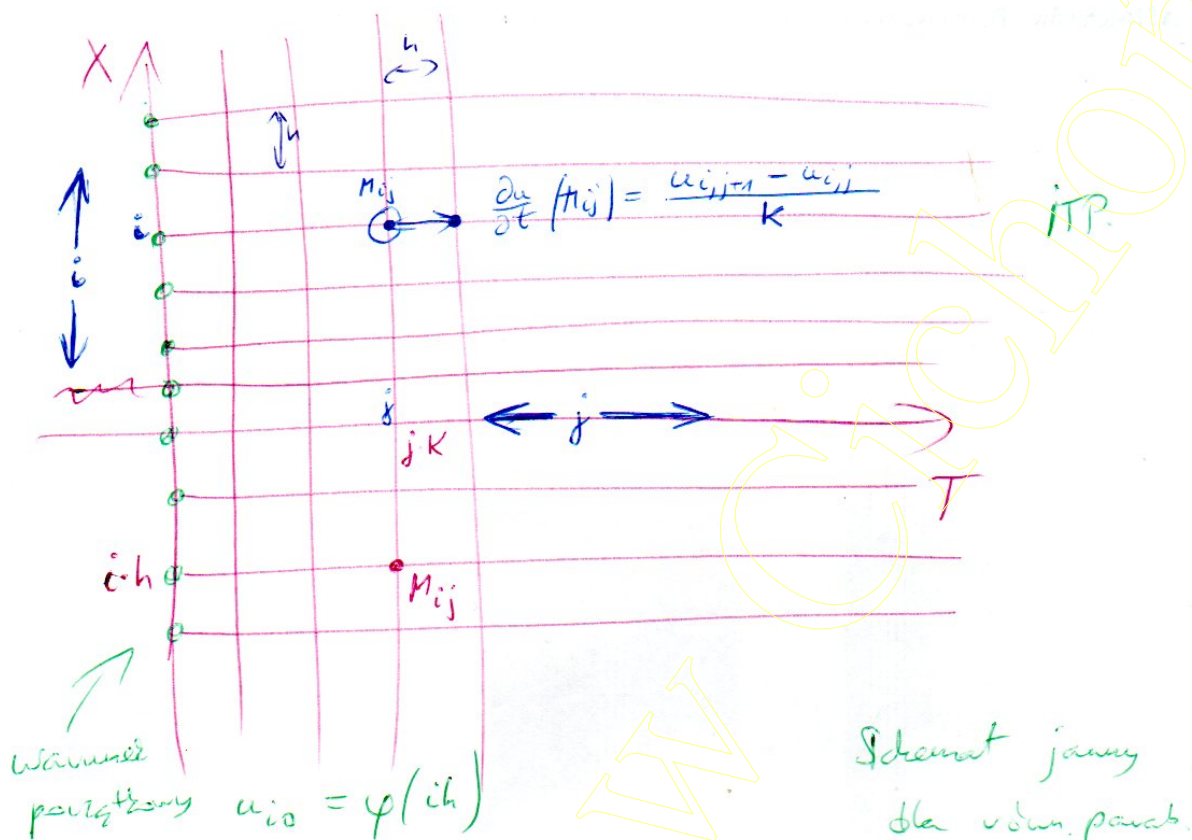
zwane węzłami siatki. Dla ustalonego węzła (x_m, y_n) mówimy, że węzły (x_{m-1}, y_n) , (x_m, y_{n-1}) , (x_{m+1}, y_n) , (x_m, y_{n+1}) są jego sąsiednimi. Oznaczmy

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_h &= \{(x_m, y_n) : (x_m, y_n) \in \overline{\Omega}\} \\ \Omega_h &= \{(x_m, y_n) \in \Omega : \text{wszystkie jego węzły sąsiednie leżą w } \widehat{\Omega}\} \\ \partial_h \Omega &= \widehat{\Omega}_h \setminus \Omega_h. \end{aligned}$$

Dla funkcji $\omega : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy laplasjan dyskretny

$$\begin{aligned} \Delta_h(\omega)(x_m, y_n) &= \frac{\omega(x_{m+1}, y_n) + \omega(x_{m-1}, y_n) + \omega(x_m, y_{n-1}) + \omega(x_m, y_{n+1}) - 4\omega(x_m, y_n)}{h^2}. \end{aligned}$$

Na rysunku zaznaczono schemat postępowania dla równania (tam: parabolicznego) na półpłaszczyźnie:



Dyskretny operator Laplace'a

Zastosujemy omówione metody dyskretyzacji pochodnych i otrzymane schematy w bardzo ważnym przypadku: operatora Laplace'a. Użyjemy takie schematy (metoda różnic skończonych).

Model jednowymiarowy:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \cdot h^2 \simeq \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wynika to wprost z konstrukcji pochodnych cząstkowych:

$$\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} \simeq \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}(x_i)$$

Mamy

$$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{h^2} Lf,$$

gdzie

$$L = \begin{pmatrix} -2.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & -2.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -2.0 \end{pmatrix}$$

a \mathbf{f} jest wektorem wartości funkcji w punktach siatki. Będziemy oznaczać $u_k = f(x_k)$.

Model dwuwymiarowy ($n = 2$), dyskretne równanie Laplace'a na regularnej siatce z jednorodnym warunkiem Dirichleta.

Dwuwymiarowy operator Laplace'a można zapisać używając sumy Kronecker'a:

$$L = \mathbf{D}_{xx} \oplus \mathbf{D}_{yy} = \mathbf{D}_{xx} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \mathbf{D}_{yy},$$

gdzie \mathbf{D}_{xx} i \mathbf{D}_{yy} są jednowymiarowymi dyskretnymi Laplasjanami w kierunku x i y - kierunkach, odpowiednio a Id jest macierzą jednostkową o odpowiednim rozmiarze.

Jego reprezentacja macierzowa jest postaci (**uwaga:** to JEDNA z możliwych reprezentacji):

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Można zauważyć, że obliczając wartość Laplasjanu w punktach "po lewej" natrafiamy na problem, mianowicie brakuje nam wartości w punkcie "po lewej" punktu x_0 . Ponieważ nie mamy tej wartości bo wychodzi ona **poza obszar** - musimy ją zadać - będzie to nasz **warunek brzegowy**.

W takim schemacie przyjmujemy $u_{-1} = a$. Będziemy więc mieli pierwsze i ostatnie równanie:

$$\frac{a - 2u_0 + u_1}{h^2} = b_0$$

Podobny problem pojawia się na drugim końcu, gdzie kładziemy $u_N = b$ i otrzymujemy równanie:

$$\frac{-2u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2} = b_{N-1} - \frac{b}{h^2}.$$

Metoda siatek zamienia rozwiązywanie zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych na rozwiązywanie układów równań algebraicznych. Generuje rozwiązania przybliżone zagadnienia **w węzłach siatki!**

Uwaga: jeżeli siatka będzie miała rozmiar rzędu 100^2 to macierz będzie miała $(100^2)^2$ elementów, z których jedynie 50000 będzie niezerowych. Uzasadnia to zastosowanie zapisu tzw. macierzy rzadkich, gdyż chcąc zapisać wszystkie elementy zużylibyśmy o wiele więcej pamięci (-> algebra komputerowa).

Dalsze materiały - polecam książkę J. Ombacha [Ombach]. Polecam też <http://www-users.mat.umk.pl/fraczek/skrypt.pdf> strona 103 i dalsze - opracowane na podstawie wspomnianej książki i **dostępne w Internecie.**

0.3 Dyskretny operator Laplace'a - przykładowe zastosowanie.

Jedną z miar pozwalających stwierdzić, w jakim stopniu prawdopodobne jest że dany punkt obrazu zalicza się do krawędzi znajdującego się na obrazie obiektu jest operator Laplace'a. Mamy do czynienia z układem kartezjańskim, zatem wartość laplasjanu w określonym punkcie (o ile funkcja obrazu jest w nim podwójnie różniczkowalna) może być obliczana ze wzoru:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \quad (1)$$

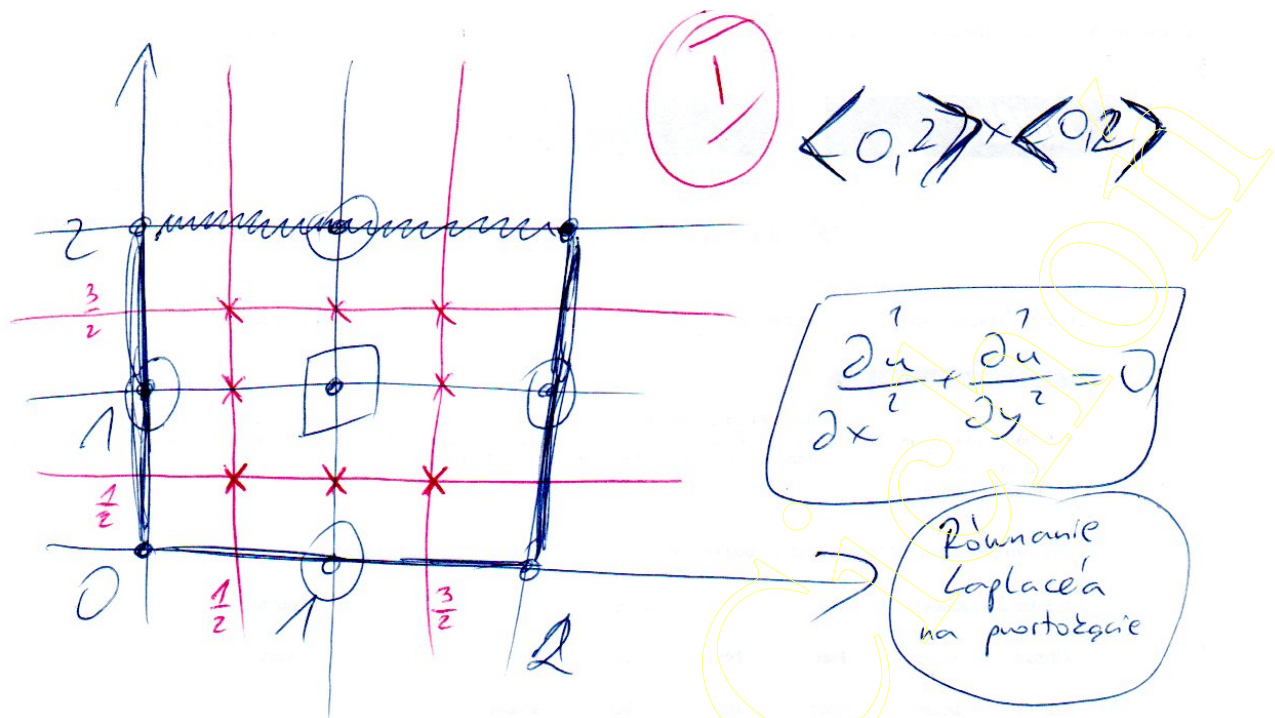
Zastosowanie operacji matematycznej bazującej na ciągłości funkcji może się wydawać problematyczne, jeżeli mamy do czynienia z macierzą pikseli. Można się tutaj jednak odwołać do stojącej za laplasjanem intuicji – jest to miara tego, w jakim stopniu dany punkt różni się od swojego sąsiedztwa. Występującą w literaturze metodą obliczania „dyskretnego operatora Laplace'a” jest np. dokonanie splotu macierzy pikseli z macierzą postaci (to **KOLEJNE przybliżenie dyskretnego operatora - były inne, a jeszcze inne znajdują się w zastosowaniach!**

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Takie podejście ma jednak wadę polegającą na tym, że ten sam obraz może dawać zupełnie różne co do znaczenia wyniki, jeżeli zmieniona zostanie jego rozdzielczość, ale to już poza zakresem naszego kursu...

0.4 Ćwiczenia.

Zadanie 1. - rozwiązane Obliczyć wartości rozwiązania równania Laplace'a na prostokącie z podanymi warunkami brzegowymi dla kroku $h = 1$ i $h = 1/2$:



$$\frac{1}{h=1} \left(u(0,1) + u(1,2) + u(1,0) + u(2,1) - 4 \cdot u(1,1) \right) = 0 \cdot h^2$$

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 && \text{warunki} \\ u(2,y) &= 0 && \text{brzegowe} \\ u(x,0) &= 0 \\ u(x,2) &= x(2-x) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$0 + 1 + 0 + 0 - 4u(1,1) = 0$$

$$u(1,1) = \frac{1}{4}$$

Etap I : obliczanie w węzłach z krokiem $h = 1$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \quad u(0, \frac{1}{2}) + u(\frac{1}{2}, 1) + u(1, \frac{1}{2}) + u(\frac{1}{2}, 0) - 4 \cdot u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0 \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right) & \quad u(0, 1) + u(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + u(1, 1) + u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - 4 \cdot u(\frac{1}{2}, 1) = 0 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) & \quad u(0, \frac{3}{2}) + u(\frac{1}{2}, 2) + u(1, \frac{3}{2}) + u(\frac{1}{2}, 1) - 4 \cdot u(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 0 \end{aligned}$$

1° (rozpisać g(!) wzmian)

2° Napisać w postaci układu równań lub w postaci macierzowej

3° Rozwiązać ... (stuzisz)

4° Rozwiązać zagadnienie metodą

punkt „środkowy“

$$+! (1,1): u(\frac{1}{2}, 1) + u(1, \frac{3}{2}) + u(\frac{3}{2}, 1) + u(1, \frac{1}{2}) - 4 \cdot u(1, 1) = 0$$

= -1

Fouriera! Podnieci wartości wierzchołki w wybranych punktach (zostawza (1,1)!)!

y \ x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	2	3
1	4	5	6
$\frac{3}{2}$	7	8	5

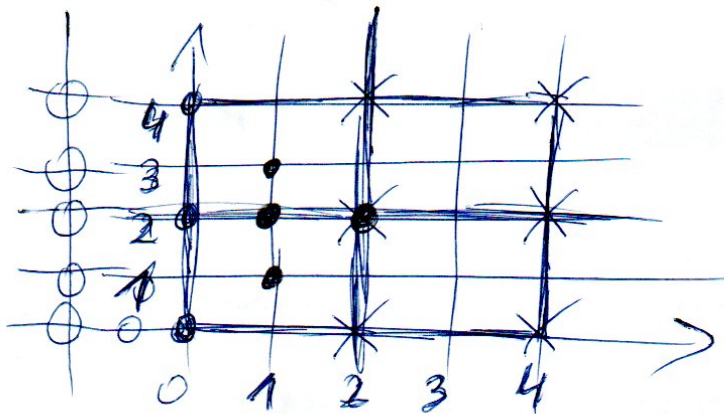
przetadowe uporządkowanie punktów

(czy jest widoczna jaźal reguła?)

	w	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1° wzmianie	0	-4	1	0	1	0	0	0	0	0
2° wzmianie	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	-4	0	0	1	0	0
3° wzmianie	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	1	0	0	-4	1	0

Etap II : obliczanie w węzłach z krokiem $h = 1/2$.

Zadanie 2. - do uzupełnienia...



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(0, y) = y \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1}$$

$$\int dx = - \int dy$$

$$x + y = C_1$$

$$u(x, y) = \varphi(x + y)$$

$$C_1 = y$$

$$u(0, y) = C_1$$

$$u(x, y) = x + y$$

N_p I PUNKTY WEWNĘTRZNE

$$\left[\frac{u(1,2) - u(0,2)}{1} \right] - \left[\frac{u(0,3) - u(0,1)}{2} \right] = 0$$

$$u(1,2) - 2 - \frac{3-1}{2} = 0$$

$$u(1,2) = 3$$

$$\left[\frac{u(1,3) - u(0,3)}{1} \right] - \left[\frac{u(0,4) - u(0,2)}{2} \right] = 0$$

$$u(1,3) - 3 - \frac{4-2}{2} = 0$$

$$u(1,3) = 4$$

→ analogicznie $u(1,1) = 2$

II PUNKTY 2 linii
($x=2$)

$$\left[\frac{u(2,3) - u(1,1)}{2} \right] + \left[\frac{u(2,2) - u(0,2)}{2} \right] = 0$$

$$-\frac{4-2}{2} + \frac{u(2,2) - 2}{2} = 0$$

$$u(2,2) = 4$$

III PUNKTY BRZEGOWE
(pod. jednostronne)

$$\text{np. } (1,0) \quad \frac{u(1,0) - u(0,0)}{1} - \frac{u(0,1) - u(0,0)}{1} = 0$$

$$u(1,0) = 1$$

Proszę dokończyć obliczenia...

Literatura

[Palczewski] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne: teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*, WNT Warszawa 1999

[Ombach] J. Ombach, *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo - Maple*, UJ Kraków 1999

[Przeradzki] B. Przeradzki, *Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych*, UŁ Łódź 2003