prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń 2019/2020

1 Poprawność metody Fouriera.

Cała - opisana wcześniej - metoda będzie prawdziwa pod pewnymi warunkami. Jedne z nich, co naturalne, dotyczą założeń o funkcjach występujących w zagadnieniu, inne dotyczą problemu zbieżności uzyskanego szeregu oraz szeregów pierwszych i drugich jego pochodnych - dla uzyskanie rozwiązania klasycznego muszą być jednostajnie zbieżne. Podamy teraz proste warunki przy których zbieżność taka zachodzi.

Przypomnijmy, że badając zagadnienie struny uzyskaliśmy

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos(\frac{an\pi}{l}t) + B_n \sin(\frac{an\pi}{l}t) \Big) \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

gdzie $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds, \quad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds.$

Oczywiście

$$|u_n(x,t)| \leqslant |A_n| + |B_n|.$$

Obliczamy pochodne

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) = \frac{an\pi}{l}\Big(- A_n \sin(\frac{na\pi}{l}t) + B_n \cos(\frac{na\pi}{l}t) \Big) \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

wynika, że $|\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)| \leqslant \frac{na\pi}{l}\Big(|A_n| + |B_n|\Big)$.

Podobnie możemy zbadać drugie pochodne:

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n(x,t)\Big| &\leqslant \Big(\frac{na\pi}{l}\Big)^2\Big(|A_n| + |B_n|\Big); \Big|\frac{\partial}{\partial x}u_n(x,t)\Big| \\ &\leqslant \frac{n\pi}{l}\Big(|A_n| + |B_n|\Big) \\ \Big|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x,t)\Big| &\leqslant \Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^2\Big(|A_n| + |B_n|\Big). \end{aligned}$$

To jednak pochodne wyrażeń pod znakiem szeregu, my musimy zastosować twierdzenie o różniczkowalności szeregów funkcyjnych. Aby uzyskać jednostajną zbieżność wspomnianych wyżej szeregów wystarczy pokazać (kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżnosci szeregów funkcyjnych!), że zbieżne są szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |A_n| \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |B_n|, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2.$$

Oczywiście (ale właściwie dlaczego?) wystarczy pokazać zbieżność tych szeregów dla $k = 2$. Pokażemy teraz zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n|$ przy dodatkowym założeniu, że funkcja φ posiada czwartą pochodną, pochodna ta jest funkcją całkowalną i ponadto $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ oraz $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$.

Przyjmując $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$ mamy

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\lambda_n s)ds.$$

Całkując czterokrotnie przez części otrzymamy

$$\begin{aligned}
\int_0^l \varphi(s)\sin(\lambda_n s)\,ds &= -\frac{1}{\lambda_n}\varphi(s)\cos(\lambda_n s)\Big|_0^l + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^l \varphi'(s)\cos(\lambda_n s)\,ds \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\int_0^l \varphi'(s)\cos(\lambda_n s)\,ds \\
&= \frac{1}{\lambda_n^2}\varphi'(s)\sin(\lambda_n s)\Big|_0^l - \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l \varphi''(s)\sin(\lambda_n s)\,ds \\
&= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l \varphi''(s)\sin(\lambda_n s)\,ds \\
&= \frac{1}{\lambda_n^3}\varphi''(s)\cos(\lambda_n s)\Big|_0^l - \frac{1}{\lambda_n^3}\int_0^l \varphi'''(s)\cos(\lambda_n s)\,ds \\
&= -\frac{1}{\lambda_n^3}\int_0^l \varphi'''(s)\cos(\lambda_n s)\,ds \\
&= -\frac{1}{\lambda_n^4}\varphi'''(s)\sin(\lambda_n s)\Big|_0^l + \frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^l \varphi^{(4)}(s)\sin(\lambda_n s)\,ds \\
&= \frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^l \varphi^{(4)}(s)\sin(\lambda_n s)\,ds.
\end{aligned}$$

Stąd

$$|A_n| = \left|\frac{2}{l}\frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^l \varphi^{(4)}(s)\sin(\lambda_n s)\,ds\right| \leqslant \frac{2l^3}{n^4\pi^4}\int_0^l |\varphi^{(4)}(s)|\,ds = \frac{1}{n^4}C,$$

gdzie $C = \dfrac{2l^3}{\pi^4}\displaystyle\int_0^l |\varphi^{(4)}(s)|\,ds$.

W konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|A_n| \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

skąd - na mocy kryterium porównawczego - wynika natychmiast, że badany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|A_n|$ jest zbieżny. Analogicznie możemy pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|B_n|$ jest zbieżny. Oczywiście, przy przyjętych założeniach, tym bardziej szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n|$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} n|B_n|$ są zbieżne. Na mocy kryterium Weierstrassa to pociąga jednostajną zbieżność szeregu wraz z jego pochodnymi. Oczywiście, takie kryterium stanowi jedynie warunek wystarczający i oznacza, że metoda Fouriera przy przyjętych założeniach o funkcjach φ i ψ jest poprawna.

W teorii szeregów Fouriera mamy wiele innych - ZNACZNIE lepszych wyników, pozwalających na istotne osłabienie przyjętych tu założeń o funkcjach φ i ψ.