prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Rozwiązanie zadań metodą Fouriera i problem istnienia klasycznych rozwiązań.

Zadanie: Określić typ równania.

Rozwiąż zagadnienie metodą Fouriera rozdzielania zmiennych:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z warunkami brzegowymi

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \quad , \quad u(0,x) = x \cdot (x-l) \text{ dla } x \in (0,l).$$

Rozwiązanie : ("prawie" pełne) Tu mamy od razu postać kanoniczną równania parabolicznego...

Na początku szukamy rozwiązań postaci: $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$. Wstawiamy do równania: $\frac{\partial u}{\partial t} = T'(t) \cdot X(x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t) \cdot X''(x)$:

$$T'(t) \cdot X(x) = T(t) \cdot X''(x).$$

Rozdzielamy zmienne (dzielimy obustronnie przez $T(t) \cdot X(x)$):

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Lewa strona jest tylko funkcją zmiennej t, a prawa zmiennej x, czyli są to funkcje równe stałej. Oznaczmy ją przez λ. Dostaniemy

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

czyli dwa równania różniczkowe - pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych:

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0$$

oraz drugiego rzędu o stałych współczynnikach:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

Teraz warunki brzegowe: $0 = u(t,0) = T(t)\cdot X(0)$, $0 = u(t,l) = T(t)\cdot X(l)$. Oczywiście $T(t)$ nie może być zerem (bo wtedy $u \equiv 0$ i nie zachodzi ostatni warunek brzegowy). Stąd:

$$X(0) = 0 \quad , \quad X(l) = 0.$$

Mamy zagadnienie:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad , \quad X(0) = 0 \quad , \quad X(l) = 0. \tag{1}$$

Uwaga: gdyby ktoś badał ostatni z warunków (on jest niejednorodny, funkcja niezerowa - to istotne!!), to otrzymałby $u(0,x) = T(0)\cdot X(x) = x\cdot(x-l)$, a wię na ogół nie może zajść!

Wracamy do zagadnienie (1). Musimy znaleźć jego wartości własne i funkcje własne - to układ tych ostatnich powinien nam dać układ ortogonalny funkcji pozwalający na rozwijanie funkcji w szeregi Fouriera względem tego układu!

Najpierw wielomian charakterystyczny: $F(k) = k^2 - \lambda$, ma pierwiastki $+\sqrt{\lambda}$ oraz $-\sqrt{\lambda}$, a więc układ fundamentalny rozwiązań to $e^{\sqrt{\lambda}x}$ i $e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Rozwiązanie ogólne:

$$X(x) = A\cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Z warunków brzegowych: $0 = X(0) = A + B$ oraz $0 = A\cdot e^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l}$.

Z pierwszego $B = -A$, a więc z drugiego

$$A\cdot(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0.$$

Ponieważ $A \neq 0$ (bo wówczas $B = -A = 0$, czyli $X(x) \equiv 0$ - sprzeczne), to możemy podzielić powyższe równanie obustronnie przez A uzyskujc $e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$. Pomnóżmy teraz przez $e^{\sqrt{\lambda}l}$ i otrzymamy:

$$e^{2\sqrt{\lambda}l} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1$$

Dla $\lambda \geq 0$ mamy tylko jedno rozwiązanie - przypadek odrzucamy (byłoby zerowe rozwiązanie X, a więc też u, a to wyklucza spełnianie niezerowego warunku brzegowego - tego z funkcją $x\cdot(x-l)$). Dla $\lambda < 0$ mamy natomiast

$$e^{2i\sqrt{-\lambda}l} = 1$$

i ze wzorów Eulera: $2\sqrt{-\lambda}l = 2n\pi$ dla dowolnego n całkowitego. Czyli dla każdego (ustalonego) n (naturalnego!!) mamy inną wartość własną

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

(oczywiście, jak już wiemy muszą być to wartości ujemne). Odpowiadają im funkcje własne

$$X_n(x) = A_n \cdot e^{\sqrt{\lambda_n} x} + B_n e^{-\sqrt{\lambda x}} = A_n \cdot e^{\frac{in\pi x}{l}} + B_n e^{-\frac{in\pi x}{l}}.$$

Z reguły, aby unikać funkcji typu $e^{i\varphi}$, poleca się skorzystanie ze wzorów Eulera, a wtedy uzyskamy "typowo" rzeczywiste funkcje własne:

$$X_n(x) = C_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} + D_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Drugie z równań jest postaci $T'(t) - \lambda T(t) = 0$, a po rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{dT}{T} = \lambda\, dt.$$

Po całkowaniu mamy więc: $\ln T = \lambda t + E_*$ (E_* - dowolna stała) i ostatecznie

$$T(t) = E \cdot e^{\lambda t}.$$

Po wstawieniu wartości własnych mamy funkcje

$$u_n(t,x) = \left(C_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} + D_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot E_n \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}.$$

Każda z nich spełnia równanie i dwa jednorodne warunki brzegowe. Rozważmy więc funkcje

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n E_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} + D_n E_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}.$$

Musimy tak dobrać współczynniki, aby spełniony był ostatni warunek brzegowy (niejednorodny). Dla $t = 0$ mamy

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n E_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} + D_n E_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Rozwijamy teraz funkcję $g(x) = x \cdot (x - l)$ w szereg Fouriera na przedziale $(0, l)$ (zauważmy, że zakładamy tu równość funkcji i jej szeregu Fouriera...):

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

gdzie a_n i b_n są dane wzorami Eulera-Fouriera (**samodzielnie** przypomnieć wzory), czyli dla danej funkcji g możemy je łatwo obliczyć (to też samodzielnie, w końcu to tylko całkowania...)!

Wtedy biorąc $C_n E_n = a_n$ oraz $D_n E_n = b_n$ uzyskamy żądany wynik

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}.$$

Na zakończenie ważne pytanie: czy ten szereg jest zbieżny jednostajnie wraz z pochodnymi do drugiego rzędu włącznie??? Tylko wtedy będzie klasycznym rozwiązaniem.

Kontrprzykład: Nie będę oryginalny, podam klasyczny kontrprzykład, że uzyskany wynik w postaci szeregu Fouriera nie musi być rozwiązaniem klasycznym.

Rozpatrzmy dla równanie struny z warunkiem początkowym: $u(0,x) = g(x)$ oraz $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) \equiv 0$, gdzie dla pewnego $d \in (0,1)$:

$$g(x) = x \qquad \text{dla} \quad 0 \le x \le d$$

$$g(x) = \frac{d(1-x)}{1-d} \qquad \text{dla} \quad d < x \le 1.$$

Po obliczeniach metodą Fouriera (samodzielnie...) otrzymamy szereg postaci:

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi^2(1-d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sin k\pi d \cdot \sin k\pi x \cdot \cos k\pi t.$$

Jest oczywiście jednostajnie zbieżny (kryterium Weierstrassa z majorantą zbieżną rzędu $\frac{1}{k^2}$), czyli mamy funkcję ciągłą u. Tym niemniej, różniczkując dwukrotnie szereg (wyraz po wyrazie) względem x dostajemy (nie napisałem, że to jest równe $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, a dlaczego - za chwilę!):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi d \cdot \sin k\pi x \cdot \sin k\pi t.$$

Ponieważ dla $t = \pm n$ lub $x = \pm n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ funkcje sinus w tych punktach są równe zeru, to szeregi są zbieżne do sumy zero.

Niestety, w każdym innym punkcie t lub x (tj. obie współrzędne niezerowe!) nie zachodzi nawet warunek konieczny zbieżności szeregu, a więc szeregi po zróżniczkowaniu wyraz po wyrazie nie mogą być zbieżne!

To - oczywiście - oznacza jedynie, że nie wiemy czy suma tego szeregu jest dwukrotnie różniczkowalna względem x (zresztą dla t jest dokładnie tak samo...).

Wniosek: nie wiemy czy jest to rozwiązanie klasyczne badanego zagadnienia!

Metoda Fouriera nie zawsze prowadzi do uzyskania rozwiązań klasycznych zagadnienia początkowo-brzegowego. To prowadzi do dalszej części wykładu - wprowadzone różniczkowanie w sensie uogólnionym i teoria dystrybucji... (ale to już kolejny przedmiot)