0.1 Funkcje harmoniczne.

Definicja. Funkcję klasy C^2 w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, spełniającą w tym obszarze równanie Laplace'a:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$

i ciągłą na $\partial\Omega$ nazywamy funkcją **harmoniczną** w Ω. Warto jednak dodać, że istnieją rozwiązania tego równania nie będące funkcjami harmonicznymi (wskazówka: istnienie pochodnych cząstkowych nie pociąga ciągłości funkcji wielu zmiennych), np. $Re\, e^{\frac{-1}{z^4}}$.

Wynika stąd, że rozwiązanie ogólne równania Laplace'a to po prostu zbiór funkcji harmonicznych. Ale jak duży on jest? Zbiór takich funkcji oznaczmy przez $h(\Omega)$. Ponieważ pochodne są operatorami liniowymi, to oczywiście $(a, b \in \mathbb{R},\ u, v \in h(\Omega) \Rightarrow au + bv \in h(\Omega)$, a więc jest to **przestrzeń liniowa**. Oczywiście wprost sprawdzając równanie, widać, że funkcjami harmonicznymi $(n = 2)$ są funkcja stałe, afiniczne obu zmiennych czy pewne wielomiany drugiego stopnia, np. $u(x, y) = x^2 + x - y^2 + 5y - 7$. Inne możemy tworzyć stosując ich kombinacje liniowe.

A jak jest z iloczynem? Można sprawdzić (z definicji funkcji harmonicznej, że $u, v \in h(\Omega) \Rightarrow u \cdot v \in h(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$$

Funkcje harmoniczne posiadają wiele interesujących własności, często są badane poza kontekstem równań różniczkowych cząstkowych, a ich teoria stanowi rozbudowany dział matematyki. Poniżej podamy niektóre własności tych funkcji. Rozpoczniemy od prostych wniosków wynikających łatwo ze wzorów Gaussa-Greena-Ostrogradskiego (dowody w literaturze):

1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym o regularnym brzegu $\partial\Omega$. Niech u będzie funkcją harmoniczną w obszarze $U \supset \overline{\Omega}$. Wówczas

   $$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS = 0,$$

   gdzie ν jest normalną do $\partial\Omega$.

2. Jeśli funkcja u jest klasy C^2 w obszarze ograniczonym Ω i ponadto dla dowolnego obszaru regularnego $D \subset \Omega$ $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS = 0$, to u jest funkcją harmoniczną w Ω .

3. (Własność wartości średniej.) Niech $u \in C^2(\Omega)$ $\big(\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty$\big)$ będzie funkcją harmoniczną. Wtedy
$$u(x) = \frac{1}{\upsilon_r} \int_{\partial B(x,r)} u\, dS = \frac{1}{\omega_r} \int_{B(x,r)} u\, dy, \quad x \in \Omega,$$
dla dowolnego $r>0$ takiego, że $B(x,r) \subset \Omega$.

4. Załóżmy, że $u \in C^2(\Omega)$ i dla każdej kuli $B(x,r) \subset \Omega$
$$u(x) = \frac{1}{\upsilon_r} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y),$$
gdzie υ_r oznacza powierzchnię sfery $\partial B(x,r)$. Wtedy funkcja u jest harmoniczna w Ω.

5. (Regularność.) Zakładamy, że funkcja $u \in C^2(\Omega)$ ma własność wartości średniej. Wtedy $u \in C^\infty(\Omega)$.

6. (Nierówność Harnacka.) Niech u będzie nieujemną funkcją harmoniczną w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas dla dowolnego spójnego i zwartego zbioru $K \subset \Omega$ istnieje stała c (zależna od K) taka, że
$$\frac{u(y)}{c} \leqslant u(x) \leqslant cu(y) \qquad \text{dla } x,\, y \in K.$$
W szczególności $\sup\limits_{x \in K} u(x) \leqslant c \inf\limits_{x \in K} u(x)$.

Będziemy korzystać z ich istotnego związku **funkcji harmonicznych dwóch zmiennych** z przestrzenią funkcji holomorficznych (analitycznych, różniczkowalnych w sposób zespolony).

Część rzeczywista $u = u(x.y)$ i część urojona $v = v(x,y)$ funkcji analitycznej $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$ są funkcjami harmonicznymi (i nazywamy je wówczas funkcjami harmonicznymi sprzężonymi). Na odwrót, mając daną funkcję harmoniczną, możemy łatwo skonstruować odpowiadającą jej funkcję analityczną. Stąd też szereg własności funkcji harmonicznych jest natychmiastową konsekwencją stosownych własności funkcji zmiennej zespolonej i na odwrót. Mamy:

Twierdzenie. Niech funkcja u będzie harmoniczna w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. . Wtedy $u \in C^\infty(\Omega)$.

Przykłady. Weźmy kilka prostych funkcji analitycznych i zobaczmy kilka rozwiązań równania Laplace'a...

1. $f(z) = f(x+iy) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow$
   $u(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v(x,y) = 2xy$ są harmoniczne,
2. $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) \Rightarrow$
   $u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x,y) = e^x \sin y$ są harmoniczne,
3. $f(z) =$ ....(wybrać samodzielnie ciekawą funkcje analityczną)

Teraz nie mamy problemu z przykładami, można brać ich kombinacje liniowe np. $u(x,y) = e^x \cos x + 2xy + 75y - 123$... **Zadanie: podać kilka przykładów niebanalnych funkcji harmonicznych...**

Absolutnie najważniejsza dla nas własność funkcji harmonicznych zawarta jest w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie. (Zasada maksimum) Niech Ω będzie otwartym ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Zakładamy, że funkcja u jest ciągła w $\overline{\Omega}$, posiada pochodne cząstkowe drugiego rzędu w Ω i ponadto

$$\Delta u = f \quad \text{w} \quad \Omega \quad , \quad u = g \quad \text{na} \quad \partial\Omega,$$

gdzie $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ są danymi funkcjami ciągłymi, a $\partial\Omega$ oznacza brzeg obszaru Ω.

Wtedy funkcja u osiąga maksimum na brzegu obszaru $\partial\Omega$

Dowód: Zbadajmy najpierw funkcje dodatnie: $f > 0$ w zbiorze Ω. Ponieważ $\overline{\Omega}$ jako zbiór domknięty i ograniczony jest zbiorem zwartym, to u jako funkcja ciągła osiąga w tym zbiorze maksimum (kresy) - co wynika z twierdzenia Weierstrassa.

W takim razie nie wprost: przypuśćmy, że maksimum to jest osiągnięte w punkcie $x^0 \in \Omega$. Oczywiście, korzystając ze znanych kryteriów posiadania przez funkcję ekstremum lokalnego:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0) \leqslant 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

W szczególności wynika stąd, że $\Delta u(x^0) \leqslant 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $f(x^0) > 0$. Zatem $x^0 \in \partial\Omega$.

Przypuśćmy teraz, że $f \geqslant 0$. Dla $k \in \mathbb{N}$ rozważmy funkcję $v_k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $v_k(x) = u(x) + \dfrac{\|x\|^2}{k}$. Oczywiście $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = u$ w zbiorze $\overline{\Omega}$ oraz

$$\Delta v_k = \Delta u + \frac{2n}{k} \geqslant \frac{2n}{k} > 0 \quad \text{w} \quad \Omega.$$

Czyli funkcje te są dodatnie i na mocy części pierwszej dowodu każda v_k osiąga maksimum na brzegu obszaru $\partial\Omega$, powiedzmy w punkcie x^k .

Ponieważ $\partial\Omega$ jest zbiorem zwartym, to istnieje podciąg $\{x^{k_i}\}_{i\geqslant 1}$ ciągu $\{x^k\}$, zbieżny do pewnego punktu $\tilde{x} \in \partial\Omega$ (twierdzenie Bolzano-Weierstrassa). Niech $x \in \overline{\Omega}$. Stąd

$$u(x) \leqslant u(x) + \frac{\|x\|^2}{k_i} = v_{k_i}(x) \leqslant v_{k_i}(x^{k_i}) = u(x^{k_i}) + \frac{\|x^{k_i}\|^2}{k_i}.$$

Przechodząc do granicy z $i \to \infty$ otrzymamy $u(x) \leqslant u(\tilde{x})$. Ponieważ x jest dowolnym punktem w $\overline{\Omega}$, to uzyskamy tezę. □

Przykład zastosowania. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem o brzegu klasy C^1. Wtedy zagadnienie Dirichleta

$$\Delta u - cu = f \quad \text{w } \Omega, \quad u = g \quad \text{na } \partial\Omega \quad (c > 0),$$

posiada co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód: (nie wprost) Przypuśćmy, że u_1, u_2 są rozwiązaniami tego problemu. Wówczas funkcja $v = u_2 - u_1$ spełnia

$$\begin{aligned} \Delta v - cv &= \Delta(u_2 - u_1) - c(u_2 - u_1) = \Delta u_2 - \Delta u_1 - cu_2 + cu_1 \\ &= (\Delta u_2 - cu_2) - (\Delta u_1 - cu_1) = 0, \end{aligned}$$

czyli jest rozwiązaniem problemu $\Delta v - cv = 0$ w Ω, $v = 0$ na $\partial\Omega$. Korzystając z równości $\Delta v - cv = 0$ uzyskamy

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega v(\Delta v - cv)\, dx = \int_\Omega v\Delta v - c\int_\Omega v^2\, dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial v}{\partial \upsilon}\, dS - \\ \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v\, dx - c\int_\Omega v^2\, dx = -\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - c\int_\Omega v^2\, dx. \end{aligned}$$

Zatem $\int_\Omega v^2 dx = 0$ i w konsekwencji $v = 0$ w Ω , co oznacza, że $u_1 = u_2$. □

(Zasada ekstremum dla funkcji harmonicznej)

Funkcja u harmoniczna w obszarze otwartym ograniczonym Ω , różna od stałej, w żadnym punkcie tego obszaru nie może osiągać swojego ekstremum.

Wniosek. Niech u_1 i u_2 będą funkcjami harmonicznymi w Ω, ciągłymi w $\overline{\Omega}$. Jeśli $u_1(x) \leqslant u_2(x)$ dla $x \in \partial\Omega$, to $u_1(x) \leqslant u_2(x)$ dla $x \in \overline{\Omega}$.

To natychmiast wynika z zasady maksimum zastosowanej do funkcji harmonicznej $u = u_2 - u_1$.

Przykład. Rozważmy równanie Laplace'a na kole jednostkowym

$$\Delta u = 0,$$

gdzie $u = u(x, y)$, (x, y) należy do koła jednostkowego.

Przyjmujemy współrzędne biegunowe $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Zakładamy, że rozwiązanie spełnia warunek brzegowy $u(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta$, dla $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Zgodnie z zasadą maksimum rozwiązanie naszego problemu przyjmuje wartość maksymalną na brzegu okręgu. Wynika stąd, że $-1 \leqslant u(x, y) \leqslant 1$.

Uwaga: Jeśli obszar Ω nie jest ograniczony, teza zasady maksimum nie musi zachodzić!!

Istotnie, jak już wiemy, funkcja $u = e^y \sin x$ jest harmoniczna w obszarze $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \pi,\ y > 0\}$, ale nie osiąga maksimum na brzegu tego obszaru.

Zasada maksimum dla równania ciepła. Niech Ω będzie otwartym ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja u jest ciągła w $\overline{\Omega}$, posiada pochodne cząstkowe 2-go rzędu w Ω i ponadto

$$u_t = \Delta u \qquad \text{w} \quad \Omega.$$

Wówczas u osiąga swoje ekstrema na brzegu obszaru $\partial\Omega$.

Dla zainteresowanych: Funkcję u nazywamy subharmoniczną, gdy $\Delta u \geqslant 0$ oraz superharmoniczną, gdy $\Delta u \leqslant 0$. W wielu zastosowaniach bada się takie właśnie funkcje w miejsce harmonicznych, w szczególności ich wersje własności wartości średniej czy zasadę maksimum.

Mały komentarz na koniec - dla pewnych obszarów będziemy rozwiązywać zagadnienia brzegowe dla równania Laplace'a stosując zamianę zmiennych. Warto wiedzieć, że jeśli w funkcji harmonicznej dokonamy zamiany zmiennych, gdzie A jest macierzą tej zamiany, to ta funkcja w nowych zmiennych pozostanie harmoniczna dla $A = \lambda B$, gdzie B jest macierzą ortogonalną (tj. $B^T = B^{-1}$). Obejmuje to oczywiście symetrie, obroty czy przekształcenia logarytmiczno-biegunowe (patrz materiały o metodzie odwzorowań konforemnych czy o rozwiązaniu podstawowym równania Laplace'a).