prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Postać kanoniczna.

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \qquad (1)$$

gdzie $a_{11},, a_{12}, a_{22}$ są funkcjami określonymi w zbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$, nie zerującymi się **równocześnie** w żadnym punkcie tego zbioru, u jest szukaną funkcją klasy $C^{(2)}$ zmiennych x i y, a F jest zadaną funkcją zależną od x, y oraz u, u_x i u_y. Założenia o funkcji u pozwalają na mocy twierdzenia Schwarza traktować pochodne mieszane tej funkcji są sobie równe: $u_{xy} = u_{yx}$ i dlatego we wzorze mamy podwojony współczynnik przy pochodnej mieszanej (**uwaga na zadania!**).

Ponieważ krokiem pewnych ważnych metod rozwiązywania takich równań jest przedstawienie równań w innych współrzędnych i uzyskanie "jak najprostszej" postaci równania, to pokażemy jakie to byłyby postacie i jak do nich doprowadzić. Okazuje się, że najpierw musimy znaleźć **niezmienniki** równania przy zamianie zmiennych (nieosobliwej) i sklasyfikować równania przed wskazaniem takich optymalnych zamian.

Kluczowy cel podstawienia: wprowadzić w nowej postaci równania jak najwięcej współczynników równych zeru (przy pochodnych II rzędu).

Rozważmy zamianę zmiennych (transformację, przekształcenie)

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y), \quad (x,y) \in D. \qquad (2)$$

Przyjmijmy, że przekształcenie te obszar D transformuje w pewien obszar Δ. Rozważamy rozwiązania klasyczne, więc załóżmy, że funkcje ξ i η są dyfeomorfizmami klasy $C^{(1)}$ w zbiorze D i ponadto istnieje transformacja odwrotna do transformacji (2):

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \Delta. \qquad (3)$$

Jeśli jakobian transformacji (2) jest różny od zera, to przekształcenie takie nazywamy przekształceniem **nieosobliwym**. Oczywiście transformacja nieosobliwa jest zawsze odwracalna.

Niech w będzie rozwiązaniem równania w nowych zmiennych (po transformacji). Po powrocie do współrzędnych wyjściowych otrzymamy rozwiązanie równania wyjściowego $u(x,y) = w\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big), \quad (x,y) \in D$.

Oczywiście pojawią się takie wzory transformacyjne przyspieszające podstawianie do równań

$$
\begin{aligned}
u_x &= w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x, \\
u_y &= w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y, \\
u_{xx} &= w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2 + w_\xi \xi_{xx} + w_\eta \eta_{xx}, \\
u_{xy} &= w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}\big(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\big) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + w_\xi \xi_{xy} + w_\eta \eta_{xy}, \\
u_{yy} &= w_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\eta_y^2 + w_\xi \xi_{yy} + w_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned}
$$

Stąd:

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\
b_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\big(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\big) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\
b_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,
\end{aligned}
$$

to równanie (1) po zastosowaniu transformaty (3) przyjmie postać

$$
b_{11}w_{\xi\xi} + 2b_{12}w_{\xi\eta} + b_{22}w_{\eta\eta} + \widetilde{F}(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta) = 0,
$$

gdzie współczynniki b_{11}, b_{12}, b_{22} są funkcjami zmiennych ξ i η.

Korzystając z podanych wzorów można sprawdzić, że

$$
b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = \big(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\big)\big(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x\big)^2,
$$

wyróżniki równań w obu postaciach mają więc taki sam znak i typ równania jest niezmiennikiem względem przekształceń nieosobliwych.

Podane wyżej wzory są nazywane wzorami transformacyjnymi (i odwrotnymi do wzorów transformacyjnych). Wielokrotnie (zwłaszcza w zastosowaniach) pozwala się na ich bezpośrednie stosowania zamiast każdorazowego obliczania pochodnych. Jeśli ktoś chciałby tak robić, to musi uzupełnić wzory o współczynniki przy pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu b_1 i b_2, a nawet przy u (czyli b), ale o tym w innym materiale.

Dla celów klasyfikacji równań i postaci kanonicznej ważne są jednak tylko te trzy podane wyżej.

Najpierw niezmiennik nieosobliwych transformacji. Przypomnę, ze na razie rozważamy funkcje dwóch zmiennych. Określamy funkcję o wartościach liczbowych

$$
\Delta(x, y) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.
$$

Badamy pewien obszar $D \subset \mathbb{R}^2$. Jeżeli w każdym punkcie $(x, y) \in D$ mamy ustalony znak tej funkcji, to

- $\Delta(x, y) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ równanie nazywamy **hiperbolicznym** w D,
- $\Delta(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ równanie nazywamy **parabolicznym** w D,
- $\Delta(x, y) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ równanie nazywamy **eliptycznym** w D.

Dla większej liczby zmiennych potrzebne będzie badanie form kwadratowych, ale to na razie nie będzie nam potrzebne.

Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że typ równania określony j.w. jest **niezmiennikiem** równania przy dowolnej *nieosobliwej* zamianie zmiennych (transformacji).

Wróćmy do wzorów transformacyjnych podanych wyżej. Celem wykonywania podstawień będzie na ogół znalezienie jak najprostszej postaci w nowych zmiennych. Przyjmowane będzie ogólne ustalenie: współczynniki b_{11}, b_{12} i b_{22} *powinny być* równe jedynie 0 lub - jeśli to niemożliwe, to 1.

W zależności od typu równania da się osiągnąć takie postacie, nazywane kanonicznymi:

- równanie **hiperboliczne** w $D \quad \Rightarrow \quad b_{11} = b_{22} = 0,\ b_{12} = 1$,
- równanie **paraboliczne** w $D \quad \Rightarrow \quad b_{11} = b_{12} = 0,\ b_{22} = 1$ lub
  . $\quad b_{22} = b_{12} = 0,\ b_{11} = 1$
- równanie **eliptyczne** w $D \quad \Rightarrow \quad b_{11} = b_{22} = 1,\ b_{12} = 0$.

Pozostaje ustalić **jak** znaleźć takie podstawienie, a odpowiedź kryje się we wzorach transformacyjnych. Kluczowe jest zauważenie, ze wybór ξ tak, aby $a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$ daje nam $b_{11} = 0$ i podobnie pozostałe wzory...

W praktyce zbudujemy specjalne równanie, nazywane równanie charakterystyk równania (1) i jego całki pierwsze będą wykorzystywane w roli funkcji ξ i η:

$$a_{11}(x, y)(dy)^2 - 2a_{12}(x, y)dxdy + a_{22}(x, y)(dx)^2 = 0.$$

Jeśli równanie nie jest od razu w postaci kanonicznej, to jeden z współczynników a_{11} lub a_{22} musi być różny od zera, ustalmy dalej (bez straty ogólności), że będzie to np. a_{11}. Wtedy równanie zapiszemy w postaci

$$a_{11}(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}(x, y)\frac{dy}{dx} + a_{22}(x, y) = 0$$

i podstawiając $t = \frac{dy}{dx}$ dostaniemy trójmian

$$a_{11}t^2 - 2a_{12}t + a_{22} = 0.$$

Jego wyróżnik to $\tilde{\Delta} = 4\Delta$, a wiec ma taki sam znak jak funkcja określająca typ równania. Dla równań hiperbolicznych mamy 2 pierwiastki, a więc 2 całki pierwsze równania charakterystyk, dla parabolicznych jest jeden pierwiastek i jedna całka pierwsza, a dla eliptycznych nie ma pierwiastków rzeczywistych, za to są dwa zespolone. W tym ostatnim przypadku mamy dwie zespolone całki pierwsze (sprzężone).

Każdy przypadek rozważamy odrębnie pokazując, że przyjęcie za nową zmienna całki pierwszej powoduje zachodzenie warunku zerowania określonego współczynnika b_{11} i/lub b_{22}. W przypadku eliptycznym nie ma takich całek rzeczywistych, a więc te współczynniki nie będą mogły się zerować, ale przyjęcie w podstawieniach za ξ i η części rzeczywistej i urojonej całki pierwszej zespolonej da efekt żądany w powyższym opisie celów postaci kanonicznych.

Niekiedy warto obok przejścia do postaci kanonicznej rozważać transformaty upraszczające równania: w przypadku równania liniowego zawierającego część z pochodnym rzędu pierwszego postaci $a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial x}$, stosując transformację $u(x, y) = v(x, y) \cdot e^{\alpha x+\beta y}$ i dobierając odpowiednio α i β możemy pozbyć się wyrazów z pierwszą pochodną. Takie ćwiczenia pojawią się nieco później.

Szerzej - szczegóły takich podstawień w każdym typie równań - w kolejnym materiale...