prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Odwzorowania konforemne - uwagi.

Współrzędne biegunowo-logarytmiczne (log-polar) na płaszczyźnie: para liczb (ρ, θ), gdzie ρ oznacza logarytm odległości pomiędzy danym punktem i środkiem układu współrzędnych i θ jest kątem pomiędzy osią OX i promieniem wodzącym. Współrzędna kątowa jest więc taka sama jak dla współrzędnych biegunowych, a promieniowa przeprowadzono zgodnie ze wzorem

$$r = e^{\rho}.$$

Wzory przekształcenia współrzędnych kartezjańskich do log-polar współrzędnych

$$\begin{cases} \rho = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan y/x \text{ dla } x \geqslant 0. \end{cases} ,$$

a transformacja odwrotna

$$\begin{cases} x = e^{\rho} \cos \theta, \\ y = e^{\rho} \sin \theta. \end{cases}$$

Te ostatnie przekształcenie we współrzędnych zespolonych ($(x, y) = x + iy$) jest postaci

$$x + iy = e^{\rho + i\theta}$$

Przykłady zastosowania:

a) Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

we współrzędnych biegunowych może być zapisane w postaci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

lub inaczej

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

a ponieważ we współrzędnych log-polar

$$r = e^{\rho} r \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \rho},$$

to równanie przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

a więc taką samą jak we współrzędnych kartezjańskich! Co więcej (patrz zadanie), taka sytuacja ma miejsce zawsze, gdy zamiana zmiennych jest odwzorowaniem konforemnym (metoda odwzorowań konforemnych w literaturze...)...

b) Gdy chcemy rozwiązać zagadnienie Dirichleta w dziedzinie symetrycznej ze względu na obroty używamy rozdzielania zmiennych (por. materiały dla koła i pierścienia).

Powstają dwa równania:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \nu^2\Theta(\theta) = 0 \\ r^2R''(r) + rR'(r) - \nu^2 R(r) = 0 \end{cases}.$$

Pierwsze z nich ma współczynniki stałe i można go łatwo rozwiązać. Drugie jest szczególnym przypadkiem równania Eulera.

$$r^2R''(r) + crR'(r) + dR(r) = 0.$$

Można go rozwiązać (patrz też kurs funkcji specjalnych) za pomocą nowych współrzędnych log-polar uzyskamy:

$$P''(\rho) + (c-1)P'(\rho) + dP(\rho) = 0,$$

czyli w przypadku równani Laplace'a

$$P''(\rho) - \ v^2P(\rho) = 0,$$

a te może być łatwo rozwiązane...

Więcej o metodzie odwzorowań konforemnych - w podanej literaturze (np. [Kącki])...