prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Twiedzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej.

Rozważmy równanie różniczkowe (na razie) liniowe rzędu m postaci

$$u^{(m)}_{x_n \cdots x_n} = \sum_{|\alpha| \leqslant m,\, a_n < m} a_\alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n)\, D^\alpha u + f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, który ma niepuste przecięcie z płaszczyzną $x_n = 0$.

Zagadnieniem Cauchy'ego (zagadnieniem początkowym) dla równania (1) nazywamy zagadnienie polegające na wyznaczeniu rozwiązania tego równania spełniającego jednocześnie następujące warunki początkowe

$$u^{(k)}_{x_n \cdots x_n} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = \varphi_k (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \tag{2}$$

dla $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \Omega$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Następujące twierdzenie określa warunki wystarczające istnienia lokalnego rozwiązania powyższego zagadnienia początkowego.

Twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej. Jeżeli:

1° współczynniki a_α i wyraz wolny f w równaniu (1) są funkcjami analitycznymi w obszarze Ω,

2° funkcje φ_k , $k = 0, 1, \ldots, m-1$ są analityczne w obszarze ω będącym przecięciem Ω i płaszczyzny $x_n = 0$,

to zagadnienie Cauchy'ego (1-2) ma **dokładnie jedno rozwiązanie analityczne**, określone w pewnym otoczeniu Ω'.

Obszar Ω' zależy od obszaru analityczności danych funkcji.

Twierdzenie w **pełnej** wersji (nie tylko dla liniowych) wymaga trochę więcej założeń, w tym o postaci równania, obszarze i warunkach brzegowych - co wykracza poza zamierzony zakres tego wykładu. Zainteresowanych odsyłam do literatury:

$$B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$$
$$\mathbf{c} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m.$$

i równanie:

$$\mathbf{u}_{x^n} = \sum_{j=1}^{n-1} B(\mathbf{u}, x')\mathbf{u}_{x_j} + \mathbf{c}(\mathbf{u}, x'),$$

gdy $x^n = 0$. Nie zakłada się istnienia rozwiązań na $\mathbb{R}^n$, a tylko na pewnym otoczeniu zera.

Ciekawym zastosowaniem tego twierdzenia jest przypadek $m = n = 1$. Podamy ciekawe zastosowanie, o którym raczej nie mówiło się na kursie równań zwyczajnych.

Metoda szeregów potęgowych.

Na początku ustalmy otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i załóżmy, że mamy funkcję ciągłą $f : U \to \mathbb{R}^n$. Bez straty ogólności rozpatrzmy

$$\dot{u}(t) = f(u(t)).$$

Zagadnienie Cauchy'ego polega na znalezieniu rozwiązania spełniającego warunek początkowy $u(0) = u_0 \in U$ dla pewnego u_0. Znamy:

Twierdzenie Picarda. *Załóżmy, że istnieją $r, K > 0$ takie, że $B_r(u_0) \subseteq U$ oraz warunek Lipschitz'a*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant K\|x - u_0\|$$

dla $x, y \in B_r(u_0)$. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ zależne od K, r i funkcja u klasy C^1 $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ będąca **jedynym** *rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego w tym przedziale (lokalnym).*

Jeżeli przyjmiemy nieco silniejsze założenie o f (będzie lokalnie analityczna), to twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej pozwoli na uzyskanie jedyności lokalnego rozwiązania, ale już analitycznego, a nie tylko klasy C^1.

Twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej w wersji $n = m = 1$.

Załóżmy, że istnieją $r, K > 0$ takie, że $B_r(u_0) \subseteq U$ oraz f jest analityczna w otoczeniu punktu u_0. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ zależne od K, r i funkcja analityczna $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ będąca **jedynym** rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego w tym przedziale.

Co to oznacza? Skoro szukamy funkcji analitycznych (lokalnie rozwijalnych w szereg potęgowy)

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{t^k}{k!},$$

to Co najmniej formalnie (bez badania a priori zbieżności) będziemy szukali takich właśnie rozwiązań, czyli możemy wstawić taka postać funkcji do równania i obliczyć współczynniki - na ogół rekurencyjnie, korzystając z warunku początkowego. metoda świetnie sprawdza się przy równaniach liniowych wyższych rzędów ($m > 1, n = 1$).

Najprostszy możliwy **przykład** ilustrujący metodę:

Rozpatrzmy równanie

$$y' = y \quad , \quad y(0) = 1.$$

Wtedy $f(x, y) = y$ jest analityczna w otoczeniu $x_0 = 0$, czyli szukamy rozwiązań analitycznych, czyli postaci

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Wtedy

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}.$$

Wstawiając do równania:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{3}$$

Z warunku początkowego

$$1 = y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{0^k}{k!} = a_0.$$

Zauważmy, że z równania (3), porównując współczynniki przy tych samych potęgach mamy:

$$1 \cdot a_1 = a_0 \quad , \quad 2 \cdot a_2 = a_1 \quad , \quad 3 \cdot a_3 = a_2 \quad , \quad 4 \cdot a_4 = a_3, \ldots$$

Czyli

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} \quad , \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \quad , \quad , \ldots$$

Łatwo zauważyć, że

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Stąd

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x.$$

Rozwiązaniem jest funkcja $y(x) = e^x$. **Uwaga:** nie zawsze widać jaka znana funkcja jest sumą szeregu, ale metoda zawsze daje szereg będący rozwiązaniem i w wielu zastosowaniach i tak brane są jego sumy częściowe jako przybliżenia rozwiązań...