I jeszcze o równaniu Laplace'a na kuli:

Metodę rozdzielania zmiennych można stosować także do innych równań. Jedynym ograniczeniem jest ich liniowość i liniowość warunków dodatkowych. Pokażemy teraz, jak stosuje się ona do najprostszych równań eliptycznych takich jak równanie Laplace'a. W przypadku dwuwymiarowym zbiór Ω może być prostokątem albo dawać się sprowadzić do prostokąta. Niech więc Ω będzie kołem o środku w początku układu i promieniu R. Przechodząc do współrzędnych biegunowych $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ musimy wyrazić laplasjan w nowych współrzędnych. Zamiast równania

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Równanie Laplace'a w zmiennych kartezjańskich i biegunowych

dostaniemy

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\phi\phi} = 0.$$

Jeśli interesuje nas równanie Laplace'a z warunkiem Dirichleta

$$u \mid \partial\Omega = h, \qquad h : \partial\Omega \to \mathbb{R},$$

to odpowiedni warunek na v ma postać

$$v(R, \phi) = h(\phi).$$

Musimy jednak pamiętać, że zamiana zmiennych jest prawomocna dla $r > 0$, czyli $(x, y) \neq (0, 0)$. Od rozwiązania v można więc żądać, by istniała granica $\lim_{r\to 0^+} v\,(r, \phi)$. Drugim warunkiem zgodności jest 2π-okresowość funkcji h. Przy założeniu ciągłości (a nawet całkowalności) funkcji h możemy znaleźć jej szereg trygonometryczny. Przy założeniu, że h jest ciągła i przedziałami monotoniczna, zachodzi równość

$$h\,(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi\right),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h\,(\psi)\cos n\psi\; d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h\,(\psi)\sin\psi\; d\psi.$$

Jeśli rozwiązanie ma postać $v(r,\phi) = f(r)\,g(\phi)$, to

$$\frac{r^2 f''(r)}{f(r)} + \frac{r f'(r)}{f(r)} + \frac{g''(\phi)}{g(\phi)} = 0,$$

a więc obie funkcje wchodzące w skład tej sumy muszą być stałe i

$$\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} = \lambda = -\frac{g''(\phi)}{g(\phi)}.$$

Ponieważ g powinna być funkcją 2π-okresową, a równanie

$$g''(\phi) + \lambda g(\phi) = 0$$

ma rozwiązania 2π-okresowe tylko dla $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, więc tylko takie stałe są dopuszczalne. Dla nich

$$g_n(\phi) = c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi,$$

gdzie c_n i d_n są dowolnymi stałymi. Odpowiadające n^2 równanie na funkcję f_n ma postać

$$r^2 f_n''(r) + r f_n'(r) - n^2 f_n(r) = 0.$$

Jest to równanie Eulera, którego układem fundamentalnym rozwiązań jest para funkcji $r \mapsto r^n$, $r \mapsto r^{-n}$, a w wyjątkowym przypadku $n = 0$ para

Albo znamy **równanie Eulera**, albo „zauważamy”, że te funkcje spełniają równanie

funkcji $r \mapsto 1$, $r \mapsto \ln r$. Można więc zapisać nieznane rozwiązanie v jako sumę szeregu

$$\begin{aligned} v(r,\phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\, g_n(\phi) \\ &= \widehat{c}_0 + \widehat{d}_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\widehat{c}_n r^n + \widehat{d}_n r^{-n}\right)(c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi). \end{aligned}$$

Każdy składnik tej sumy spełnia równanie różniczkowe bez względu na wybór stałych. Jeśliby więc można było wejść pod znak sumy szeregu z pochodnymi aż do rzędu 2 włącznie z zachowaniem jednostajnej zbieżności, to funkcja v spełniałaby równanie różniczkowe. Zaobserwowane przez nas wcześniej żądanie, by istniała granica $\lim_{r\to 0^+} v(r,\phi)$, oznacza, że $\widehat{d}_n = 0$ dla $n \geq 0$.

Pozostaje wykorzystać warunek brzegowy

$$h(\phi) = v(R,\phi) = \widehat{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{c}_n R^n (c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi).$$

Porównując współczynniki z szeregu Fouriera funkcji h

$$\widehat{c}_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \widehat{c}_n R^n c_n = a_n, \quad \widehat{c}_n R^n d_n = b_n,$$

i w rezultacie

$$v(r,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi).$$

← **Rozwiązanie!**

Teraz problem poprawności metody: czy uzyskany szereg jest (klasycznym) rozwiązaniem naszego równania.

Zbieżność jednostajna tego szeregu w każdym kole domkniętym $\overline{B}(0,R_1) \subset B(0,R)$ wraz z pochodnymi jest gwarantowana na podstawie kryterium Weierstrassa i prostego faktu:

jeśli $0 < q < 1$, ciąg (a_n) jest ograniczony i $p \in \mathbb{N}$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^p q^n$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Zatem otrzymana funkcja v spełnia równanie różniczkowe w kole $B(0,R)$. Przy funkcji h prawie dowolnej będącej jedynie sumą zbieżnego punktowo szeregu Fouriera, nie jest wcale oczywiste, że

$$\lim_{r \to R^-} v(r,\phi) = h(\phi).$$

Jest to konsekwencja tw. Abela (por. wykłady z analizy lub np. [Fichtenholz], t. 2, s. 344). W rezultacie znaleziona funkcja v jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla koła.

Tu mamy sprawdzenie , że przy przyjętych założeniach mamy jednak rozwiązanie klasyczne – uwaga na ciągłość na brzegu!

Jeśli wstawimy wzory na a_n i b_n i wykorzystamy znany wzór trygonometryczny

$$\cos n\psi \cos n\phi + \sin n\psi \sin n\phi = \cos n(\phi - \psi),$$

to dostaniemy

$$v(r,\phi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\phi - \psi) \right] d\psi.$$

Możemy zsumować szereg w nawiasie kwadratowym. Wystarczy oznaczyć

$$z = \frac{r}{R} e^{i(\phi - \psi)}.$$

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\cos n\left(\phi - \psi\right) + i \sin n\left(\phi - \psi\right)\right),$$

a więc nasz szereg to część rzeczywista

$$\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \mathrm{Re} \frac{z}{1-z},$$

a wyrażenie w nawiasie kwadratowym to

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{1-z}\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{\left|1-\frac{r}{R}\left(\cos\left(\phi-\psi\right) + i\sin\left(\phi-\psi\right)\right)\right|^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{R^2\left[\left(1-\frac{r}{R}\cos\left(\phi-\psi\right)\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2\left(\phi-\psi\right)\right]} \\
&= \frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{R^2 - 2Rr\cos\left(\phi-\psi\right) + r^2}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór (zwany wzorem Poissona):

wzór Poissona

$$v\left(r, \phi\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(R^2 - r^2\right) h\left(\psi\right)}{R^2 - 2Rr\cos\left(\phi - \psi\right) + r^2}\, d\psi.$$

Ogólniej, dla zagadnienia Dirichleta w kuli $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$

$$\Delta u = 0 \quad \text{w} \quad B(0,R), \qquad u \mid \partial B(0,R) = h$$

rozwiązaniem jest

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R}\int_{\partial B(0,R)} \frac{R^2 - ||x||^2}{||x-y||^n} h(y)\, dS_y,$$

gdzie całkowanie odbywa się względem miary indukowanej na sferze, a σ_n oznacza miarę indukowaną sfery o promieniu 1 w $\mathbb{R}^n$.