prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Zadania różne - równanie Laplace'a.

Zadanie 1. Pokazać, że postać równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

na obszarze Ω nie zmieni się, gdy go przesuniemy lub obrócimy:

a)
$$\xi = x + a \quad \eta = y + b,$$

b)
$$\xi = x\cos\phi + y\sin\phi \quad , \quad \eta = -x\sin\phi + y\cos\phi.$$

Zadanie 2. Rozważmy zagadnienie brzegowe dla równanie Laplace'a na kwadracie $[0,1]\times[0,1]$ z warunkami brzegowymi:

$$u(0,y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0$$

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u(x,1) = 1.$$

Znaleźć jego rozwiązanie. Określi jaki to typ zagadnienia brzegowego!

Zadanie 3. Wybierz, które z równań podanych niżej jest postacią równania Laplace'a we współrzędnych biegunowych. Wiedząc już, które to równanie znajdź rozwiązanie zagadnienia dla obszaru zadanego warunkami:

$$1 \leqslant r < \infty \quad , \quad u(1,\varphi) = \frac{1}{4}\sin(4\varphi) + 8\cos(5\varphi).$$

Postacie do wyboru:

1.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} = 0,$$

2.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

3.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0.$$