prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń 2019/2020

1 Metoda Fouriera dla równań niejednorodnych.

Rozpatrzmy sytuację, gdy badamy zagadnienie z funkcją niewiadomą $u(t,x)$, ale w którym występuje funkcja $f(t,x)$ nie pozwalająca na bezpośrednie rozdzielanie zmiennych. Np.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x),$$

z warunkami

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) \qquad (\text{“początkowe", bo dla } t=0)$$

oraz brzegowymi (dla $x=0$ i $x=l$)

$$u(t,0) = a(t) \quad , \quad u(t,l) = b(t),$$

(tzw. drgania wymuszone struny). Przyjmujemy przy tym warunki zgodności (np. w (0,0) to $\varphi(0) = a(0)$, w $(0,l)$ to $\varphi(l) = b(0)$).

Pamiętajmy, że to tylko przykład, inne **zagadnienia niejednorodne** można badać podobnie! (lub zgodnie z **uwagą** na końcu materiału)

Jak streścić pomysł rozwiązania? Każde rozwiązanie $u(t,x)$ takiego zagadnienia szukane będą jako sumy funkcji:

$$u(t,x) = w(t,x) + h(t,x),$$

gdzie $w(t,x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia jednorodnego (czyli z zastąpieniem $f(t,x)$ przez funkcję zerową) i szukamy go znaną już metodą Fouriera! Czasami takie postępowanie nazywane jest zasadą superpozycji.

Czyli:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

z warunkami

$$w(0,x) = \varphi(x) \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0,x) = \psi(x) \qquad (\text{“początkowe"})$$

oraz brzegowymi

$$w(t,0) = a(t) \quad , \quad w(t,l) = b(t).$$

Pozostaje określić co to jest $h(t,x)$. To rozwiązanie równania niejednorodnego, ale z jednorodnymi warunkami brzegowo-początkowymi.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f(t,x),$$

Mieczysław Cichoń

z warunkami

$$h(0,x)=0 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial t}(0,x)=0$$

oraz brzegowymi

$$h(t,0)=0 \quad , \quad h(t,l)=0.$$

Wyjaśnijmy dlaczego: wstawiamy do równania wyjściowego zamiast $u(t,x)$ sumę $w(t,x)+h(t,x)$ i uzyskamy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=0+f(t,x)$$

czyli

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-f(t,x)\right)=0,$$

a z definicji funkcji w i h uzyskamy, że takie u spełnia równanie u. podobnie sprawdzamy warunki brzegowe i początkowe (np. $u(t,0)=w(t,0)+h(t,0)=a(t)+0=a(t)$ itd.).

Ostatnie wyjaśnienie: jak wyznaczyć $h(t,x)$?

Rozwijamy funkcję $f(t,x)$ w szereg Fouriera względem układu wyznaczonego przy obliczeniach $w(t,x)$ (uwaga: założenia muszą na to pozwalać, musi zachodzić równość funkcji i jej szeregu Fouriera, szeregi powinny być jednostajnie zbieżne wraz z pochodnymi itd.!).

$$f(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x),$$

gdzie współczynniki $f_n(t)$ obliczamy wzorami Eulera-Fouriera. samego rozwiązania poszukujemy w postaci

$$h(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} H_n(t)X_n(x).$$

Wyznaczamy współczynniki $H_n(t)$ tak, aby zachodziły warunki brzegowe (jednorodne), czyli różniczkujemy ten szereg (pamiętajmy o założeniach!), wstawimy to wszystko do równania, to samo robimy z funkcją $f(t,x)$ i porównujemy oba szeregi Fouriera (po uporządkowaniu wyrazów). Z uzyskanego równania wyznaczamy $H_n(t)$ i wstawiamy do wzoru. To wszystko... Pierwszy przykład policzony (samodzielnie) pokaże, że to nie jest skomplikowane.

2 Inne zastosowania metody Fouriera i bariery jej zastosowania.

Metoda rozdzielania zmiennych Fouriera jest powszechnie stosowana - dla wielu równań. My - niestety - na kursowym wykładzie mamy pewne ograniczenia, ale dla zainteresowanych podam pewne dalsze uwagi.

Przede wszystkim nawet jeśli powstają równania różniczkowe zwyczajne (na ogół wyższych rzędów), to nie zawsze mamy tak prostą sytuację jak stosowanie wielomianów charakterystycznych dla znalezienia układów fundamentalnych rozwiązań. A to ma **kluczowe**

Mieczysław Cichoń

znaczenie, bo powinno tworzyć układ ortogonalny zupełny dla rozwijania w nim funkcji w szeregi Fouriera! Podam klasyczny przykład: to membrana swobodna kołowa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

w $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < c\}$, gdzie u spełnia pewne warunki brzegowe.

Po zamianie zmiennych na współrzędne biegunowe (zobaczymy jeszcze dlaczego warto to zrobić) równanie przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

I sugerowany problem: jedno z równań jest postaci

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0,$$

a to już nie jest równanie o stałych współczynnikach. Niektórzy może pamiętają, że to równanie Bessela! Jego układem fundamentalnym rozwiązań jest właśnie układ funkcji specjalnych - funkcji Bessela J_n $(n = 0, 1, 2, ...)$. Ale to trzeba wiedzieć - co więcej żądane szeregi Fouriera będą właśnie rozwijane względem tego układu (a nie trygonometrycznego). Zainteresowani znajdą (można u mnie...) dalsze materiały w tym kierunku.

Na zakończenie przypomnę ograniczenia metody (założenia były wskazywane na czerwono, funkcje początkowe spełniają założenia...). I najważniejsze: w miejsce funkcji kładliśmy odpowiadające im szeregi Fouriera. Ale przecież funkcja nie musi być równa swojemu szeregowi Fouriera! Zainteresowanych proszę o sprawdzenie JAKIE założenia musi spełniać funkcja, aby ta własność zachodziła. Na zakończenie tej części proszę o zwrócenie uwagi, że uzyskana taka metodą funkcja $u(t, x)$ w ogólnym przypadku wcale nie musi być rozwiązaniem wyjściowego zagadnienia (problemy z różniczkowalnością szeregów funkcyjnych!!)! To prowadzi do nowej klasy rozwiązań (już nie: klasycznych), dla których ta metoda ma szersze zastosowanie. Ale tu potrzeba dystrybucji zamiast funkcji (rozwiązania słabe)...

2.1 Uwaga.

Ponieważ nie jest naszym celem utrudnianie sobie obliczeń, to warto zauważyć, że w pewnych sytuacjach można sobie oszczędzić rachunków przez proste operacje.

Załóżmy, że mamy niejednorodne warunki początkowe o specjalnej postaci:

$$u(0, x) = a \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = b,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ to ustalone stałe (plus pewne niejednorodne warunki brzegowe). Wtedy rozpatrując funkcję $v(t, x) = u(t, x) - at - b$ mamy problem z jednorodnymi warunkami początkowymi:

$$v(0, x) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = 0$$

Mieczysław Cichoń

oraz wstawiamy do warunków brzegowych

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - a$$

mając krótsze rachunki (przypomnę, że układy równań są krótsze dla jednorodnych warunków początkowych).

Dalsze uwagi o metodzie Fouriera - wkrótce!!

Mieczysław Cichoń