prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Informacje wstępne cz. II.

Przez równanie różniczkowe cząstkowe rozumieć będziemy **równanie** zawierające pochodne **cząstkowe** pewnej **funkcji** niewiadomej **wielu zmiennych** ($n > 1$) w sposób **istotny**.

Czyli nie są takimi równaniami (np. $u = u(t, x)$)

1. $u_t > k u_{xx}$, (nierówność)
2. $w''(x) = 3w'(x) + 2$, (jedna zmienna)
3. $u_t + v_x + w_{xxx} = 0$, (więcej niż jedna funkcja niewiadoma)
4. $(u_{tt})^0 = 3t + 5$, (nie ma pochodnych cząstkowych w sposób istotny)
5. $\frac{1}{\sqrt{x}} u_x + \frac{1}{\ln(-x)} u_x x = 0$ (pusta dziedzina funkcji u).

Rzędem równania nazwiemy najwyższy rząd pochodnej cząstkowej występujący w równaniu w sposób istotny, np.:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - uxy = 0$, (rząd III),
2. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - uxy = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, (rząd I).

Kolejny krok, i to wcale nie najbardziej oczywisty, to uzgodnienie co będzie uznawane za **rozwiązanie równania**. Nie będziemy tego zbyt formalnie wprowadzać, pozostaniemy przy intuicji (ale poprawnej). Oczywiste podejście, że to funkcja (wielu zmiennych) spełniająca równanie jest możliwa, ale mało praktyczna: oznaczałoby, że funkcja musi mieć pochodne cząstkowe *występujące w równaniu* i spełniająca te równanie w pewnej dziedzinie (równania). taka definicja jest mocno kłopotliwa, bo wyklucza większość metod rozwiązywania takich równań, ale bywa spotykana (rozwiązanie w szerokim sensie).

Zdecydowanie lepsze jest przyjęcie definicji następująco: to funkcja klasy $C^{(n)}$, gdzie n jest rzędem równania i spełniająca równanie w pewnej dziedzinie (**rozwiązanie klasyczne**.). To bardzie restrykcyjna definicja, ale pozwoli na zastosowanie *większości* metod omawianych na wykładzie. Wkrótce okaże się, że nawet zbyt restrykcyjna, co prowadzi do uogólnionych rozwiązań (komentarze będą po metodzie Fouriera)...

Zauważmy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = sgn\ x$$

nie może mieć rozwiązań klasycznych np. w obszarze $\Omega = \mathbb{R}^2$, gdyż z postaci równania wynikałoby, że pierwsza pochodna z u nie jest ciągła, czyli $u \notin C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. Z drugiej strony funkcja $u(x, y) = |x|$ jest rozwiązaniem w szerokim sensie równania

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Mieczysław Cichoń

choć nie jest klasy $C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$.

Od tej pory jednak, gdy będziemy mówili o poszukiwaniu rozwiązań, to będą one w sensie klasycznym (o ile nie zastrzeżemy inaczej w konkretnym zadaniu).

Jak rozwiązać równanie?

Jeśli to byłoby możliwe, to najprostszą metodą rozwiązywania mogłaby być **metoda bezpośredniego całkowania**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y.$$

Wtedy oczywiście (funkcje równe, to całki równe):

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, dx = \int (x+y)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + F(y),$$

gdzie F jest dowolną funkcją zmiennej y (jeśli szukamy rozwiązań klasycznych, to musimy położyć funkcję klasy $C^{(1)}$).

Podobnie da się obliczyć rozwiązania równań np. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2$ i podobne, ale już nie $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$.

Drugą metodą, która możemy szukać rozwiązań (ale na ogół nie wszystkich!!) jest **metodę rozdzielania zmiennych**. Polega na poszukiwaniu rozwiązań określonej postaci. Najczęściej będzie to suma np.

$$u(x,y) = X(x) + Y(y)$$

lub iloczyn np.

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y),$$

a funkcje są odpowiedniej do rzędu równania klasy (i nie jest to zupełny przypadek, że akurat takie postacie). Pamiętajmy: to nie musi dać *wszystkich* rozwiązań, a jedynie wybranej postaci. Rozpatrzmy prosty przykład:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u.$$

Całkować obustronnie nie możemy (co byłoby po prawej stronie?). Wypróbujmy rozdzielanie zmiennych (oba przypadki).

Suma: $u(x,y) = X(x) + Y(y)$, czyli wstawiając do równania

$$X'(x) + 0 = X(x) + Y(y).$$

Rozdzielamy zmienne

$$X'(x) - X(x) = Y(y).$$

Każda ze stron równania jest zależna od innej zmiennej, a więc jedyną możliwością jest, aby to były funkcje stałe:

$$X'(x) - X(x) = Y(y) = \lambda.$$

Mieczysław Cichoń

Mamy dwa równania: $X' - X = \lambda$ oraz $Y = \lambda$. Drugie natychmiast oznacza, że Y jest funkcja stałą, a z pierwszego (równanie różniczkowe zwyczajne liniowe):

$$\frac{dX}{X+\lambda} = dx,$$

czyli całkując obustronnie uzyskamy $X(x) = C \cdot e^x - \lambda$. Rozwiązaniami będą funkcje postaci $u(x,y) = X(x) + Y(y) = C \cdot e^x - \lambda + \lambda = C \cdot e^x$ z dowolna stałą C (włączając zero).

Iloczyn: $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, czyli ponownie wstawiamy do równania:

$$X'(x) \cdot Y(y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Teraz natychmiast dostajemy albo $Y(y) = 0$, albo $X'(x) = X(x)$, czyli jak poprzednio $X(x) = C \cdot e^x$.

Ćwiczenie: rozwiązać podaną metodą równania:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

oraz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Uwaga: jest oczywiste, że można uzyskać dwie różne klasy rozwiązań oboma podstawieniami. wtedy warto pamiętać, że jeśli równania są *liniowe*, to kombinacje liniowe rozwiązań takich równań tez są rozwiązaniami, co może zwiększyć liczbę uzyskanych rozwiązań.

Zwrócę jednak uwagę, że to **nie są wszystkie** rozwiązania, a takimi równaniami zajmiemy się później za pomocą metody charakterystyk...

Mieczysław Cichoń