**prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń**

## 0.1 Informacje wstępne.

Czasami w naszych materiałach występować będą uproszczone zapisy pochodnych cząstkowych. Np. pochodna $\frac{\partial u}{\partial x}$ będzie zapisywana niekiedy jako $u_x$, podobnie pochodne wyższych rzędów. Np. dla $u = u(x, y)$, będziemy niekiedy zapisywać $u_{xxx}$ zamiast $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ czy $u_{xy}$ zamiast $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Proste przykłady równań różniczkowych cząstkowych:

1) $u_x + 5u_y + u = \sin(x)\cos(y)$, gdzie $u = u(x, y)$,

2) $u_t = ku_{xx}$, gdzie $u = u(x, t)$,

3) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \sin(u)$, gdzie $u = u(x, y, z)$,

4) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, gdzie $u = u(x, t)$,

5) $u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{\theta\theta}\right)$, gdzie $u = u(r, \theta, t)$.

Kilka klasycznych równań, niekiedy przypominanych przez ich nazwy:

1. **Równanie dyfuzji** dla $h(x, t)$:
$$h_t = Dh_{xx}$$

2. **Równanie struny** dla $w(x, t)$:
$$w_{tt} = c^2 w_{xx}$$

3. **Równanie membrany** dla $h(x, t)$:
$$h_t = -(hh_{xxx})_x$$

4. **Równanie (wymuszonego) oscylatora harmonicznego** dla $y(t)$:
$$y_{tt} + \omega^2 y = F\cos(\Omega t)$$

5. **Równanie Poissona** dla potencjału $\Phi(x, y, z)$:
$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 4\pi\rho(x, y, z)$$
gdzie $\rho(x, y, z)$ jest daną gestością.

6. **Równanie Burgersa** dla $h(x, t)$:
$$h_t + hh_x = \nu h_{xx}$$

Ogólna postać równań liniowych drugiego rzędu dla $u = u(t, x)$ będzie postaci:

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = d(x,t),$$

liniowe jednorodne postaci

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0.$$

Operacje obliczania pochodnych cząstkowych są liniowe, czyli dla równań różniczkowych cząstkowych liniowych dowolna kominacja (liniowa) ich rozwiązań także będzie spełniała równanie: jeżeli $u_1$ i $u_2$ spełaniają równanie liniowe jednorodne, to

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \tag{1}$$

także będzie rozwiązaniem tego równania dla dowolnych $c_1$ i $c_2$ rzeczywistych. Na przykład obie funkcja

$$\Phi_1 = x^2 - y^2 \qquad \Phi_2 = x$$

spełniaja równanie Laplace'a: $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$, więc ich kombinacje liniowe także

$$\Phi = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 = c_1(x^2 - y^2) + c_2 x.$$

Będziemy z tego niekiedy korzystać (metoda dla równań niejednorodnych, metoda superpozycji).

W materiałach wystąpią też niekiedy operatory różniczkowe, w tym najczęściej nabla:

$$\nabla u(x,t) = (u_x(x,t), u_t(x,t)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)$$

oraz operator Laplace'a $\Delta : u \mapsto \Delta u$, gdzie:

$$\Delta u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

**Ćwiczenie 1:** Pokazać, że funkcja

$$h(x,t) = 2\alpha^2 \mathrm{sech}\left(\alpha(x - 4\alpha^2 t)\right),$$

gdzie secans hiperboliczny $\mathrm{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ spełnia następujące **równanie Korteweg-deVriesa** (trzeciego rzędu, nie jest liniowe - dlaczego?)

$$h_t + 6hh_x = h_{xxx}.$$

**Ćwiczenie 2:** Pokazać, że funkcja

$$Z(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$$

spełnia następujące **równanie powierzchni minimalnych**:

$$(1 + Z_y^2)Z_{xx} - 2Z_x Z_y Z_{xy} + (1 + Z_x^2)Z_{yy} = 0.$$