prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a.

Kolejną z ważnych metod rozwiązywania równania zagadnień brzegowych dla równania Laplace'a (dla przypomnienia: rozwiązaniem ogólnym jest zbiór funkcji harmonicznych, nie ma wzoru analitycznego na ten zbiór) jest wykorzystanie jako punktu wyjścia do obliczeń pewnego specjalnego rozwiązania.

Jak już wiemy, funkcje harmoniczne pozostają takie przy pewnych zamianach zmiennych zadanych przez macierz $A = \lambda B$, gdzie $\lambda > 0$ i B jest macierzą ortogonalną. Metoda ta polega więc na znajdowaniu specjalnego rozwiązania niezmienniczego względem pewnych grup symetrii. Ponieważ równanie Laplace'a jest niezmiennicze względem obrotów (macierz obrotu jest ortogonalna, a nawet ortonormalna - czyli $\lambda = 1$) to wydaje się naturalne poszukiwanie rozwiązań radialnych równania Laplace'a, tj. zależych tylko od odległości od zera

$$u(x, y) = v(r),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Na bazie tego rozwiązania podstawowego skonstruujemy dalsze, które spełnią żądane warunki brzegowe.

Łatwo wstawić takie funkcje do równania:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = v'(r) \cdot \frac{x}{r}$$

i stąd

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = v''(r)\Big(\frac{x}{r}\Big)^2 + v'(r)\Big(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\Big).$$

Podobnie będzie z pochodnymi względem y.

UWAGA: tu warto zauważyć, ze ta metoda świetnie sprawdza się dla n-wymiarowych równań Laplace'a, gdyż powyższe obliczenia zajdą dla każdej ze zmiennych z osobna i nie jest istotne, że jest ich dwie. W odpowiednim momencie pokażemy czym się jednak będą różnić przypadki $n = 2$ i $n > 2$!

Wstawiamy obliczone pochodne do równania i dostaniemy jedno równanie zwyczajne:

$$\Delta u = v''(r) + \frac{1}{r} v'(r).$$

a w przypadku $n > 2$

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Równanie jest liniowe jednorodne, wiec łatwo go rozwiązujemy:

$$v(r) = A \ln r + B,$$

dla $n = 2$ oraz

$$v(r) = Ar^{2-n} + B$$

w przypadku $n > 2$.

Czyli

$$v(r) = \begin{cases} A \ln r + B & , \text{dla} \quad n = 2; \\ \dfrac{A}{r^{n-2}} + B & , \text{dla} \quad n \geqslant 3, \end{cases}$$

gdzie A i B są dowolnymi stałymi.

Skoro możemy wybrać stałe, to zrobimy to w specjalny sposób i przyjmiemy ich wartości następująco: $B = 0$, natomiast

$$A = \frac{-1}{2\pi} \text{ dla } n = 2 \text{ oraz } A = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \text{ dla } n \geqslant 3,$$

gdzie $\alpha(n)$ oznacza objętość kuli jednostkowej w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Zgodnie z tymi rozważaniami przyjmujemy następującą definicję rozwiązania podstawowego.

Rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a nazywamy funkcję

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \|x\| & , \quad \text{dla} \quad n = 2; \\ -\dfrac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x\|} & , \quad \text{dla} \quad n = 3; \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} & , \quad \text{dla} \quad n \geqslant 4. \end{cases} \tag{1}$$

Koniecznie jednak trzeba zwrócić uwagę, że ta funkcja nie jest określona w zerze. *Po prostu:* nie istnieją różne od stałych rozwiązania równania Laplace'a określone na całym $\mathbb{R}^n$. A dlaczego? To już *zadanie domowe*, proszę przypomnieć sobie własności funkcji harmonicznych...

Może warto też dodać, że dla $n = 2$ rozwiązanie podstawowe $E(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ nazywamy potencjałem logarytmicznym, a dla $n = 3$ rozwiązanie podstawowe, czyli w postaci $E(x, y, z) = -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ nazywamy potencjałem newtonowskim. Posłuży nam do wyjaśnienia doboru stałych: umieszczając w punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$ ładunek elektryczny q wytworzy on pole elektryczne, którego potencjał $u(x, y, z)$ w punkcie $Q(x, y, z)$ jest określony wzorem

$$u(x, y, z) = q \cdot E(x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

I uwaga o przydatności metody: równanie Poissona.

$$\Delta u = f$$

z pewną funkcją $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dla każdego ustalonego $y \in \mathbb{R}^n$ funkcja

$$x \mapsto E(x-y)f(y)$$

jest harmoniczna, podobnie jak skończone sumy takich wyrażeń. Natomiast pod pewnymi założeniami

$$\mathbf{u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\, dy}$$

jest rozwiązaniem równania Poissona (ale oczywiście nie jest harmoniczna). Mamy bowiem twierdzenie:

"Jeśli $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, to funkcja u dana powyższym wzorem jest klasy $C^2(\mathbb{R}^n)$ i spełnia równanie Poissona.

Podobnie - korzystając z rozwiązania podstawowego równania Laplace'a konstruujemy rozwiązania zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a (więcej - przy omawianiu metody funkcji Greena, ale to już w wykracza poza ten temat - patrz w sekcji "inne metody"...).