Mieczysław Cichoń

Tu rekomendowane przeze mnie materiały prof. B. Przeradzkiego: http://im0.p.lodz.pl/~bprzeradzki/rrcz.pdf

W metodzie Fouriera celem jednego z kroków tej metody jest rozwiązanie pewnego zagadnienia Sturma-Liouville'a, a w konsekwencji znajdujemy ciąg wartości własnych i funkcji własnych. Względem tych ostatnich będziemy rozwijali funkcje w szeregi Fouriera – o ile będą to układy ortogonalne (ortonormalne) zupełne i nie zawsze będą to układy trygonometryczne. Kluczowy problem dla oceny poprawności metody, to sprawdzenie pod jakimi warunkami uzyskane szeregi Fouriera są zbieżne i w jakim sensie. Teraz kilka słów przypomnienia:

6 Przypomnienie o szeregach Fouriera

Są to szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n,$$

gdzie $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta H, tzn. $(\phi_n, \phi_m) = 0$ dla $n \neq m$ i $(\phi_n, \phi_n) = \|\phi_n\|^2 = 1$, a $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ciągiem liczbowym (rzeczywistym, gdy H jest rzeczywistą przestrzenią Hilberta) sumowalnym z kwadratem $\sum_n |a_n|^2 < \infty$. Szereg taki jest zbieżny w H, przy czym norma jego sumy wynosi $\left(\sum |a_n|^2\right)^{1/2}$ (szereg niekoniecznie jest bezwzględnie zbieżny, np.: dla $a_n = \frac{1}{n}$ nie jest, a mimo to zawsze jest absolutnie zbieżny w tym sensie, że po dowolnej permutacji jego wyrazów dostajemy szereg zbieżny do tej samej granicy).

Dla dowolnego elementu $x \in H$ mając układ ortonormalny $\{\phi_n\}$ można utworzyć szereg Fouriera

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x, \phi_n)\, \phi_n.$$

Warunek „fourierowskości" szeregu wynika z nierówności Bessela

$$\sum_n |(x, \phi_n)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Szczególną rolę pełnią tzw. układy ortonormalne zupełne, dla których zachodzi równość

$$x = \sum_n (x, \phi_n)\, \phi_n \tag{14}$$

Równość!

„przy każdym x"

przy każdym $x \in H$.

W naszych rozważaniach zwykle H jest przestrzenią funkcji całkowalnych z kwadratem na pewnym odcinku. Jeżeli $H = L^2(-\pi, \pi)$ (lub $L^2(0, 2\pi)$), to standardowym układem ortonormalnym zupełnym jest rodzina funkcji $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin nt$, $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos nt$, $n = 1, 2, \ldots$, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (nie przejmujmy się kolejnością; jak zauważyliśmy wcześniej, nie ma ona znaczenia).

Nietrudno zauważyć, że dla funkcji nieparzystej $x : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ znikają iloczyny skalarne

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt \, dt, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt,$$

więc szereg Fouriera takiej funkcji ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nt.$$

Podobnie postacią szeregu Fouriera funkcji parzystej (dla trygonometrycznego układu ortonormalnego) jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nt.$$

Ponieważ każdą funkcję $x : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ całkowalną z kwadratem można przedłużyć na $[-\pi, \pi]$ jako funkcję parzystą (i podobnie – nieparzystą), oznacza to, że ciąg $t \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$, $n = 1, 2, \ldots$, stanowi układ ortonormalny zupełny w $L^2(0, \pi)$. Taki jest też układ funkcji $t \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt$, $n = 1, 2, \ldots$, $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

Te – klasyczne – układy funkcji powinny być już znane z wykładu analizy matematycznej…

Przy przejściu do przedziału $(0, l)$ zamiast $(0, \pi)$ należy dokonać przeskalowania. Ortonormalne są układy:

$$\begin{array}{lll} t \mapsto \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} t, & n = 1, 2, \ldots, & \\ t \mapsto \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi}{l} t, & n = 1, 2, \ldots, & t \mapsto \sqrt{\frac{1}{l}}. \end{array}$$

Poza tymi układami pojawiają się też inne: układy ortonormalne zupełne funkcji własnych zagadnień Sturma-Liouville'a (por. wykład z równań różniczkowych zwyczajnych).

Równość (14) oznacza zbieżność szeregu Fouriera w przestrzeni Hilberta do elementu x. W naszym przypadku jest to zbieżność w sensie normy L^2. Chociaż wszystkie wyrazy szeregów są klasy C^∞ (przy wymienionych przykładach układów ortonormalnych zupełnych), to nie możemy mieć pewności, czy suma takiego szeregu jest nawet funkcją ciągłą. Aby tak było, nie wystarcza zbieżność w sensie L^2; potrzebna jest zbieżność jednostajna.

Zbieżność jednostajna! Szukamy funkcji co najmniej ciągłych, czyli rozwiązań klasycznych.

Dla przykładu szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(4n+1)t$$

jest szeregiem Fouriera, który dla $t = \frac{\pi}{2}$ nie jest nawet punktowo zbieżny.

Przykład: szereg Fouriera może nie być nawet punktowo zbieżny!

Podstawowym kryterium zbieżności jednostajnej jest kryterium Weierstrassa:

Jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $\sup_t |x_n(t)| = M_n$ i szereg liczbowy $\sum_n M_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_n x_n(t)$ jest jednostajnie zbieżny.

Dla szeregów trygonometrycznych oznacza to bezwzględną zbieżność szeregu współczynników $\sum_n |c_n|$ – oszacowanie $|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n}$ nie wystarcza; ale już $|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n\sqrt{n}}$ – tak. Zbieżność jednostajna gwarantuje tu ciągłość sumy szeregu.

Jeżeli x_n są różniczkowalne, to szereg pochodnych $\sum x'_n(t)$ nie musi być jednostajnie zbieżny nawet, gdy $\sum x_n(t)$ jest. Jednak jeśli dodatkowo szereg pochodnych jest taki, to funkcja

$$x(t) = \sum_n x_n(t)$$

jest różniczkowalna i

$$x'(t) = \sum_n x'_n(t)$$

(por. wykłady z analizy matematycznej). Szeregi trygonometryczne są więc zbieżne do funkcji klasy C^1, jeśli $|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n^{2+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$. Ogólniej:

Uwaga: rząd majoranty dla rozwiązań klasycznych!

Twierdzenie. Jeżeli funkcje ϕ_n są jednej z postaci $\sin n\frac{\pi}{l}t$, $\cos n\frac{\pi}{l}t$, oraz $|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n^{p+\varepsilon}}$ dla każdego n, gdzie $\varepsilon > 0$, a $p = 2, 3, \ldots$, to suma szeregu $\sum c_n \phi_n(t)$ jest funkcją klasy C^{p-1}.

Te twierdzenie jest przydatne przy badaniu **rozwiązań klasycznych**, dla równań rzędu II byłyby to funkcje klasy $C^{(2)}$ spełniające równanie (jak widać - potrzebne byłyby majoranty rzędu 2 + ε).

Twierdzenie . Jeżeli funkcja x jest 2π-okresowa i klasy C^p, to współczynniki szeregu Fouriera względem układu trygonometrycznego $\sin nt$, $\cos nt$, 1, spełniają

$$|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n^p},$$

gdzie c_n jest współczynnikiem przy $\cos nt$ lub $\sin nt$ lub 1.

Dowód. Całkując p-krotnie przez części dostajemy

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{n} x(\pi) \sin n\pi - \frac{1}{n} x(-\pi) \sin(-n\pi) - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x'(t) \sin nt dt \right| \\ &= \frac{1}{\pi n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x'(t) \sin nt \, dt \right| = \ldots = \frac{1}{\pi n^p} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x^{(p)}(t) \cos nt \, dt \right| \end{aligned}$$

(ewentualnie w ostatniej całce wystąpi $\sin nt$, gdy p jest liczbą nieparzystą), gdzie wykorzystaliśmy równości $x(\pi) = x(-\pi)$, $x'(\pi) = x'(-\pi)$, ..., $x^{(p-1)}(\pi) = x^{(p-1)}(-\pi)$. W rezultacie

$$|c_n| \leq \frac{1}{\pi n^p} \cdot 2\pi \cdot \sup \left| x^{(p)}(t) \right|.$$

Porównajmy różnicę w oszacowaniach w obu twierdzeniach. Wynika ona z faktu, że w obu przypadkach twierdzenia odwrotne nie są prawdziwe – nasze warunki nie są zbyt subtelne (idealnych zresztą nie ma). Ta niedogodność jest jednym z licznych powodów, dla których wprowadza się pojęcie rozwiązania uogólnionego równania różniczkowego cząstkowego, czy pochodnej uogólnionej. Te pojęcia idealnie „pasują” do zbieżności w sensie normy L^2.

Kryteria zbieżności jednostajne nie są warunkami dostatecznymi!

Uwaga: **brak zbieżności jednostajnej lub możliwości wykazania tego** (kryteria?) wraz z drugimi pochodnym uzyskanych szeregów powoduje, że nie ma (może nie być) rozwiązań w sensie klasycznym.

Problem ten rozwiązywany jest poprzez przyjęcie **nowych definicji rozwiązań** (np. rodzajów zbieżności uzyskanego szeregu tj. uogólnionych rozwiązań, dystrybucje – słabych rozwiązań itp. itd.).