Mieczysław Cichoń: za [Przeradzki],[Mierczyński]

O funkcjach specjalnych w równaniach różniczkowych:

Nie zawsze równania, które otrzymujemy w wyniku rozdzielnia zmiennych są tak proste jak liniowe o stałych współczynnikach. Znajdowanie układów fundamentalnych rozwiązań nie musi wiec prowadzić do klasycznych układów ortogonalnych, np. trygonometrycznych. Wtedy mogą być potrzebne informacje o **funkcjach specjalnych**. Rozpatrzmy równanie:

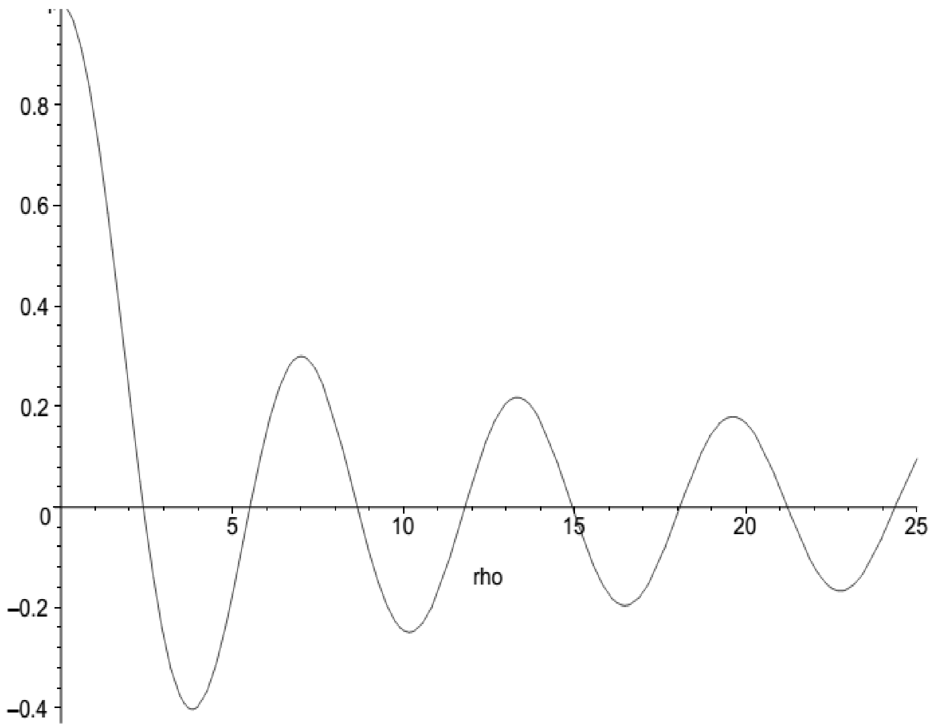
Zadanie: proszę podać przykład równania (zagadnienia) w którym – po rozdzieleniu zmiennych – powstanie takie równanie!

$$g''(\rho) + \frac{1}{\rho} g'(\rho) + g(\rho) = 0.$$

Funkcję, która spełnia ro równanie i warunki: $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, a więc

$$g(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k (k!)^2} \rho^{2k}$$

nazywamy funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0 i oznaczamy J_0. Oto wykres tej funkcji



Jak widać ma ona liczne miejsca zerowe. W podręcznikach z funkcji specjalnych dowodzi się, że w istocie J_0 ma ciąg miejsc zerowych $\mu_n \to \infty$. Jeśli rozwiązanie f ma spełniać $f(1) = 0$, to $f(r) = CJ_0(\mu_n r)$, gdzie C jest dowolną stałą. Wtedy rozwiązanie wyjściowego problemu ma postać

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\mu_n r)\left(a_n \cos \mu_n ct + b_n \sin \mu_n ct\right), \tag{21}$$

gdzie a_n, b_n są stałe. Stałe te wyznaczymy teraz z warunków początkowych. Udowodnimy najpierw warunek ortogonalności:

$$\int_0^1 xJ_0(\mu_n x)J_0(\mu_m x)\,dx = 0, \quad \text{dla} \quad n \neq m.$$

Funkcja $x \mapsto J_0(\mu x)$ spełnia równanie

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \mu^2 u = 0.$$

Równanie to z $\mu = \mu_n$ mnożymy przez $xJ_0(\mu_m x)$, równanie z $\mu = \mu_m$ mnożymy przez $xJ_0(\mu_n x)$, i oba odejmujemy stronami:

$$x\left(J_0(\mu_n x)\frac{d^2}{dx^2}J_0(\mu_m x) - J_0(\mu_m x)\frac{d^2}{dx^2}J_0(\mu_n x)\right) +$$
$$+\left(J_0(\mu_n x)\frac{d}{dx}J_0(\mu_m x) - J_0(\mu_m x)\frac{d}{dx}J_0(\mu_n x)\right) +$$
$$+(\mu_m^2 - \mu_n^2)xJ_0(\mu_m x)J_0(\mu_n x) = 0$$

lub zauważając, że pierwsze dwa składniki są pochodną iloczynu:

$$\frac{d}{dx}x\left(J_0(\mu_n x)\frac{d}{dx}J_0(\mu_m x) - J_0(\mu_m x)\frac{d}{dx}J_0(\mu_n x)\right) +$$
$$+(\mu_m^2 - \mu_n^2)xJ_0(\mu_m x)J_0(\mu_n x) = 0.$$

Całkując tę równość od 0 do 1 dostajemy tezę.

Dla zainteresowanych: dużo więcej informacji o funkcjach specjalnych i ich zastosowaniu w teorii równań różniczkowych cząstkowych na stronach prof. J. Mierczyńskiego:

http://prac.im.pwr.wroc.pl/~mierczyn/funkcje_specjalne-2.pdf
http://prac.im.pwr.wroc.pl/~mierczyn/funkcje_specjalne-3.pdf

Polecam – to wykracza poza nasz plan, ale bardzo dobrze tłumaczy istotność tej metody!