Mieczysław Cichoń: za [Przeradzki]

Zasada superpozycji – rozkład problemu na jednorodne.

Tu zbierzemy informacje o jednej z metod pomocniczych pozwalających poszerzyć zakres stosowalności metody Fouriera na równania niejednorodne oraz dla niejednorodnych warunków brzegowych. Rozpatrzmy niejednorodne równanie falowe (z siłą wymuszającą) z niezerowymi warunkami brzegowymi:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \sin 2t \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x,$$

$$\begin{array}{ll} u(0,t) = A, & u(l,t) = B, \\ u(x,0) = \phi(x), & u_t(x,0) = 0. \end{array}$$

Uwaga: warunki brzegowe tj. dla x=0 i x=l są niezerowe!

Warunki zgodności: $\phi(0) = A$, $\phi(l) = B$. Należy szukać rozwiązania w postaci sumy

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x).$$

Jeśli $w(0) = A$ i $w(l) = B$, to warunki brzegowe na funkcję v są już jednorodne. Jeśli dodatkowo $w''(x) = 0$, to v spełnia równanie falowe. Zatem należy wziąć

$$w(x) = A + \frac{B-A}{l} x$$

Tu jest kluczowe podstawienie pozwalające zamienić niejednorodne warunki brzegowe z A i B na jednorodne (z zerami)!! M.in. v(0,t) = 0

i wtedy funkcja v musi spełniać

$$\begin{array}{ll} v_{tt} = c^2 v_{xx} + \sin 2t \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x, & \\ v(0,t) = 0 = v(l,t), & \\ v(x,0) = \phi(x) - w(x), & v_t(x,0) = 0. \end{array}$$

Stosujemy teraz metodę Fouriera otrzymując

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad f_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Odnalezione zostały wartości własne oraz funkcje własne zagadnienia Sturma-Liouville'a. Teraz – w oparciu o te funkcje własne (tworzące układ ortogonalny zupełny) – będziemy poszukiwać rozwiązań w postaci szeregów Fouriera z rozwinięciami względem tego układu:

Poszukujemy więc rozwiązania w postaci

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Po wstawieniu do równania różniczkowego dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n''(t) \sin \frac{n\pi}{l} x = -c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{l^2} g_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x + \sin 2t \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

Rozwijamy także względem układu f_n funkcję $\phi - w$; współczynnikiem przy f_n jest

$$c_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (\phi(x) - w(x)) \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx.$$

Szczęśliwie niejednorodność w równaniu różniczkowym i $v_t(x,0)$ nie wymagają już rozwijania. Porównując współczynniki przy f_n dostajemy

$$g_n''(t) = -\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}g_n(t), \quad g_n(0) = c_n, \quad g_n'(0) = 0$$

dla $n \neq 2$ oraz

$$g_2''(t) = -\frac{4\pi^2c^2}{l^2}g_2(t) + \sin 2t, \quad g_2(0) = c_2, \quad g_2'(0) = 0.$$

W pierwszym przypadku

$$g_n(t) = c_n \cos\frac{n\pi c}{l}t,$$

a w drugim po uzmiennieniu stałych

$$g_2(t) = \alpha(t)\sin\frac{2\pi c}{l}t + \beta(t)\cos\frac{2\pi c}{l}t.$$

Z układu

$$\alpha'(t)\sin\frac{2\pi c}{l}t + \beta'(t)\cos\frac{2\pi c}{l}t = 0,$$
$$\frac{2\pi c}{l}\left(\alpha'(t)\cos\frac{2\pi c}{l}t - \beta'(t)\sin\frac{2\pi c}{l}t\right) = \sin 2t$$

wyznaczamy α' i β':

$$\alpha'(t) = \tfrac{l}{2\pi c}\sin 2t \cdot \cos\tfrac{2\pi c}{l}t,$$
$$\beta'(t) = -\tfrac{l}{2\pi c}\sin 2t \cdot \sin\tfrac{2\pi c}{l}t.$$

Stąd

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{l}{2\pi c}\int\limits_0^t \sin 2s \cdot \sin\frac{2\pi c}{l}(t-s)\, ds \\ &\quad + \alpha\sin\frac{2\pi c}{l}t + \beta\cos\frac{2\pi c}{l}t. \end{aligned}$$

Z warunków początkowych $g_2(0) = c_2$, $g_2'(0) = 0$ wynika, że $\beta = c_2$, $\alpha = 0$, czyli ostatecznie

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A + \frac{B-A}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi c}{l}t \sin\frac{n\pi}{l}x \\ &\quad + \frac{l}{2\pi c}\int_0^t \sin 2s \sin\frac{2\pi c}{l}(t-s)\ ds \cdot \sin\frac{2\pi}{l}x. \end{aligned}$$

Mamy poszukiwane rozwiązanie w postaci szeregu Fouriera (względem znalezionego układu funkcji własnych).

Należy jednak zauważyć, że rozpatrywaliśmy problem z umocowanymi końcami struny, gdy ich położenie nie było zmienne w czasie.

W sytuacji ogólnej, gdy A i B są funkcjami zmiennej t, należy poszukiwać rozwiązań w postaci

$$u(x,t) = v(x,t) + r_0(x)A(t) + r_l(x)B(t).$$

Jeśli chcemy, by warunki brzegowe na v były jednorodne, musimy mieć $r_0(0) = 1$, $r_l(0) = 0$ oraz $r_0(l) = 0$, $r_l(l) = 1$. To podstawienie jest możliwe dla A i B klasy C^2, ale wybór r_0 i r_l jest już prosty:

$$r_0(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad r_l(x) = \frac{x}{l}.$$

Dla ogólniejszych warunków brzegowych

$$\begin{aligned} u_x(0,t) + ru(0,t) &= A(t), \\ u_x(l,t) + su(l,t) &= B(t), \end{aligned}$$

należy użyć innych funkcji liniowych zmiennej x w miejsce r_0 i r_l.