0.1 Rodzaje zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych

Rozpatrzmy pewien zbiór $\Omega \subset R^d$ o skończonej mierze Lebesgue'a. Dla uproszczenia rozpatrzmy równanie

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} = \nabla \cdot \nabla.$$

W teorii równań eliptycznych niezmiernie ważne, ze względu na zastosowania, są zagadnienie brzegowe. Np. równanie Laplace'a spełnia dowolna funkcja harmoniczna, jak już wiemy jest ich dużo. Na ogół interesuje nas konkretna funkcja spełniająca jakiś warunek. Pytanie: jak go nałożyć? To zależy przede wszystkim od modelu matematycznego zjawiska, które opisuje równanie. Niemniej istotne jest czy i jak rozwiązać takie zagadnienie: równanie plus nałożone warunki brzegowe...

W dalszym ciągu podzbiór Ω będzie otwarty i spójny (tzn. taki że każde dwa punkty tego zbioru można połączyć krzywą zawartą w tym zbiorze) i takie zbiory nazywamy **obszarami**.

$$\begin{cases} u = \varphi, & \text{na } \partial\Omega \ = \text{warunek Dirichleta} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \psi, & \text{na } \partial\Omega \ = \text{warunek Neumanna} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + bu = g, b \in R & \text{na } \partial\Omega \ = \text{warunek Robina (mieszany, trzeci)} \end{cases} \tag{2}$$

Zagadnienie Dirichleta (zagadnienie brzegowe pierwszego rodzaju). Znaleźć rozwiązanie równania, które jest ciągłe w domknięciu obszaru Ω i spełniają warunek brzegowy $u(x) = \varphi(x)$ dla $x \in \partial\Omega$, gdzie $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją ciągłą, a $\partial\Omega$ brzegiem obszaru Ω .

Zagadnienie Neumanna (zagadnienie brzegowe drugiego rodzaju). Załóżmy, że brzeg $\partial\Omega$ obszaru Ω jest gładki (tzn. w każdym punkcie zbioru $\partial\Omega$ istnieje płaszczyzna styczna). Znaleźć rozwiązanie równania określone w obszarze Ω, klasy C^1 w jego domknięciu i spełniające warunek

$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \psi(x)$ dla $x \in \partial\Omega$, gdzie ν jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega$ w punkcie x , a $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ zadaną funkcją ciągłą.

Zagadnienie Robina (zagadnienie brzegowe trzeciego rodzaju). Znaleźć rozwiązanie równania w obszarze Ω spełniające warunek $a\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + bu(x) = g(x)$ dla $x \in \partial\Omega$, gdzie $\partial\Omega$ jest brzegiem obszaru Ω, a, b, g są danymi funkcjami określonymi na $\partial\Omega$, ν jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega$.

Czasami trzeba też rozpatrywać:

Czwarte zagadnienie brzegowe: ale polega to tylko na fakcie, że na różnych częściach brzegu obszaru $\partial\Omega$ spełnione są różne warunki (z powyższej listy).

Kluczowa własność:

Twierdzenie. Dla dowolnej funkcji φ, zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a posiada co najwyżej jedno rozwiązanie.

(to dość oczywisty wniosek z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych)

Proszę przemyśleć (samodzielnie) co dzieje się w zagadnieniu Neumanna dla równania Laplace'a ?