prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Well-posed, ill-posed problems.

Zagadnieniem **poprawnie postawionym** nazywamy zagadnienie:

$$F(x, u, Du, \ldots, D^m u) = 0, u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$$

wraz z warunkami brzegowymi

$$Au = G,$$

które spełnia następujące warunki:

1. Rozwiązanie równania istnieje w odpowiedniej wymaganej klasie regularności, np. klasyczne rozwiązania to $C^2(int(\mathcal{D})) \cap C^0(\partial\mathcal{D})$.
2. W tej klasie rozwiązanie jest jednoznaczne.
3. W tej klasie rozwiązanie jest stabilne, tj. jeśli mamy takie same zagadnienia z różnymi warunkami brzegowymi $Au_0 = G_0$, $Au_1 = G_1$ oraz warunki brzegowe są "bliskie" $\|G_0 - G_1\| < \epsilon$, to rozwiązania równań są również "bliskie" $\|u_0 - u_1\| < \epsilon$. Nazywamy taką sytuację, że rozwiązanie jest ciągłe względem warunków początkowych.

Trzeci warunku definicji jest wprowadzony, bo gdyby w modelu matematycznym opisującym zjawisko fizyczne nie było ciągłej zależności rozwiązania od warunków granicznych zadania, to praktycznie dwa jednakowe układy warunków (gdy różnice, np. pomiarowe, między nimi mieszczą się w granicach błędów pomiarowych) mogłyby odpowiadać dwóm istotnie różnym przebiegom zjawiska. Oznacza to, że zjawisko nie byłoby wyznaczalne fizycznie.

Przykład. Wyznaczyć funkcję harmoniczną $u(x, y)$ spełniającą równanie Laplace'a $\Delta u = 0$ z warunkami $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\psi(x) = 0$.

Można sprawdzić przez bezpośrednie obliczenie pochodnych i wstawienie do równania, że funkcja harmoniczna

$$u(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \cosh \lambda y$$

jest jego rozwiązaniem, a ponieważ zagadnienie Dirichleta ma co najwyżej jedno rozwiązanie, to dla dowolnej wartości parametru λ jest jego jedynym rozwiązaniem dla funkcji:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \qquad , \qquad \psi(x) = 0.$$

Ponieważ dla dużych wartości λ warunki graniczne różnią się dowolnie mało od zera, więc gdyby zagadnienie było stabilne, to również rozwiązanie powinno być bliskie zeru, ale tak nie jest. Należy jednak pamiętać, że mówiąc o stabilności zagadnienia trzeba najpierw precyzyjnie określić co to znaczy, że rozwiązanie zagadnienia zależy w sposób ciągły od warunków granicznych.

Zwracam uwagę, że dotychchzas pokazywaliśmy co najwyżej istnienie i jedyność (lub jej brak) rozwiązań. Nie oznacza to, że są poprawnie postawione!

Przykład - równanie struny. Niech u_1 i u_2 będą rozwiązaniami zagadnienia struny drgającej z warunkami początkowymi odpowiednio dla par funkcji (φ_1, ψ_1) i (φ_2, ψ_2).

Załóżmy, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta \quad \text{i} \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta.$$

Na mocy wzoru d'Alemberta mamy

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= \frac{1}{2}(\varphi_i(x-ct) + \varphi_i(x+ct)) \\ &+ \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi_i(s)ds + \frac{1}{2}c\int\limits_0^t dr \int\limits_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s,r)\, ds \end{aligned}$$

dla $i = 1, 2$.

Jeśli rozważać będziemy zmiany kształtu struny w czasie $[0, T_0]$, to różnicę pomiędzy rozwiązaniami u_1 i u_2 szacujemy

$$\begin{aligned} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| &< \frac{1}{2}|\varphi_1(x+ct) - \varphi_2(x+ct)| \\ &+ \frac{1}{2}|\varphi_2(x-ct) - \varphi_2(x-ct)| \\ &+ +\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1(s) - \psi_2(s)|\, ds \\ &< \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2c}2cT_0\delta = \delta(1+T_0). \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność oznacza, że powyższe zagadnienie jest stabilne. O ile bowiem warunki początkowe zadania nie różnią się o więcej niż δ, to również rozwiązania w dowolnym ustalonym przedziale czasowym nie różnią się o więcej niż o liczbę $\delta(1+T_0)$.

Oznacza to ciągłą zależność rozwiązania od warunków początkowych, ponieważ $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \delta(1+T_0) = 0$. Zagadnienie Cauchy'ego dla równania struny jest poprawnie postawione.

Przykład - zagadnienie źle postawione. Dla równania Laplace'a

$$\Delta u = 0$$

w obszarze Ω z warunkiem brzegowym typu Neumanna:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$$

na brzegu $\partial\Omega$ zagadnienie nie jest poprawnie postawione - nie ma nawet jednoznaczności, gdyż **każda** funkcja stała jest jego rozwiązaniem i to niezależnie od wyboru obszaru Ω...