0.1 Zagadnienia własne.

Stanowi podstawę do oceny stosowalności metody Fouriera rozdzielania zmiennych.

Ćwiczenie 1. Rozpatrzmy zagadnienie dla równania czwartego rzędu (liniowe drgania belki sprężystej)

$$u_{tt} = -u_{xxxx}$$

z warunkami brzegowymi

$$u(t,0) = 0\ ,\ u(t,1) = 0\ ,\ u_{xx}(t,0) = 0\ ,\ u_{xx}(t,1) = 0, u(0,x) = \sin \pi x\ ,\ u_t(0,x) = 0.$$

Nie będziemy go rozwiązywać - zademonstrujemy tylko na tym przykładzie jak badać zagadnienia własne (Sturma-Liouville'a).

Badamy funkcje $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$ i wstawiamy do równania:

$$T''(t) \cdot X(x) = -X^{(4)}(x) \cdot T(t)$$

i rozdzielamy zmienne

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}.$$

Jak już wiemy - skoro obie strony są funkcjami różnych zmiennych, to muszą być stałe, a więc:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = \lambda$$

i uzyskamy dwa równania

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0 \quad , \quad X^{(4)}(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Musimy wybrać które z nich wraz z warunkami brzegowymi tworzy zagadnienie Sturma-Liouville'a i pozwoli wyznaczyć ciąg funkcji własnych i funkcji własnych. Te ostatnie stanowić powinny układ ortogonalny zupełny i posłużyć do rozwinięć w szereg Fouriera (ale to poza tym zadaniem...).

Cel zadania: znaleźć (o ile istnieją!) ciąg wartości własnych tego zagadnienia i odpowiadający im ciąg funkcji własnych - to one posłużą do konstrukcji rozwiązania). To ma być ciąg, a nie pojedyncza wartość, więc badać będziemy warunek na stałą λ, w całej ogólności zależy od równania.

Dla przypomnienia: wartości własne zagadnienia to takie wartości λ dla których istnieją **niezerowe** rozwiązania równania. W tej metodzie interesują nas zagadnienia posiadające ciąg wartości własnych $\lambda_1 < \lambda_2 < ....$ Każdej z nich odpowiada dokładnie jedna unormowana funkcja własna (tj. o normie 1).

Ze względu na jednorodne warunki brzegowe badamy $X(0) = 0$, $X(1) = 0$, $X''(0) = 0$, $X''(1) = 0$ (warunek $T(0)X(x) = \sin \pi x$ nie może posłużyć do wyznaczania wartości własnych). Badamy więc zagadnienie:

$$X^{(4)} + \lambda X = 0 \ , \ X(0) = 0 \ , \ X(1) = 0 \ , \ X''(0) = 0 \ , \ X''(1) = 0.$$

Ponieważ to równanie liniowe IV rzędu o stałych współczynnikach, to tworzymy wielomian charakterystyczny

$$W(s) = s^4 + \lambda = (s^2 - \sqrt{-\lambda}) \cdot (s^2 + \sqrt{-\lambda}) = (s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3) \cdot (s - s_4).$$

Ma on (oczywiście) 4 pierwiastki (zespolone) s_1, s_2, s_3, s_4, a ponieważ współczynniki wielomianu są rzeczywiste, to są to liczby rzeczywiste lub pary liczb zespolonych sprzężonych (tak naprawdę $\pm\sqrt[4]{|\lambda|}$ oraz $\pm\sqrt[4]{|\lambda|}i$) . Rozwiązanie ogólne jest postaci

$$X(x) = A_1 \cdot e^{s_1 x} + B_1 \cdot e^{s_2 x} + C_1 \cdot e^{s_3 x} + D_1 \cdot e^{s_4 x}.$$

Możemy wstawiać warunki brzegowe do tej postaci lub, korzystając ze sprzężeń par:

$$X(x) = (A \cdot \cos \sqrt[4]{|\lambda|}x + B \cdot \sin \sqrt[4]{|\lambda|}x) + (C \cdot \cosh \sqrt[4]{|\lambda|}x + D \cdot \sinh \sqrt[4]{|\lambda|}x).$$

Ta druga wersja będzie krótsza, skorzystamy z niej. Policzmy

$$\begin{aligned} X''(x) &= -A \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \cdot \cos \sqrt[4]{|\lambda|}x - B \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \cdot \sin \sqrt[4]{|\lambda|}x \\ &+ C \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \cdot \cosh \sqrt[4]{|\lambda|}x + D \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \cdot \sinh \sqrt[4]{|\lambda|}x \qquad . \end{aligned}$$

Wstawiamy warunki brzegowe uzyskując układ równań:

$$\begin{aligned} 0 = X(0) &= A + C \\ 0 = X(1) &= (A \cdot \cos \sqrt[4]{|\lambda|} + B \cdot \sin \sqrt[4]{|\lambda|}) + (C \cdot \cosh \sqrt[4]{|\lambda|} + D \cdot \sinh \sqrt[4]{|\lambda|}) \\ 0 = X''(0) &= -A \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 + C \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \\ 0 = X''(1) &= A \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \cdot \cos \sqrt[4]{|\lambda|} - B \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \cdot \sin \sqrt[4]{|\lambda|} + \\ & \quad C \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \cdot \cosh \sqrt[4]{|\lambda|} + D \cdot (\sqrt[4]{|\lambda|})^2 \cdot \sinh \sqrt[4]{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Przede wszystkim zauważmy, że z pierwszego i trzeciego z równań dostajemy $A = C = 0$! Teraz układ przyjmuje prostszą postać:

$$\begin{aligned} 0 = X(1) &= B \cdot \sin \sqrt[4]{|\lambda|} + D \cdot \sinh \sqrt[4]{|\lambda|} \\ 0 = X''(1) &= -B \cdot \sin \sqrt[4]{|\lambda|} + D \cdot \sinh \sqrt[4]{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Oczywiście ani B, ani D nie mogą być zerami (byłoby rozwiązanie zerowe). Stąd

$$D = \frac{-B \sin \sqrt[4]{|\lambda|}}{\sinh \sqrt[4]{|\lambda|}}$$

oraz

$$2B \cdot \sin \sqrt[4]{|\lambda|} = 0.$$

Z ostatniego równania (oczywiście $B \neq 0$):

$$\sqrt[4]{|\lambda|} = n\pi \;\Rightarrow\; |\lambda| = n^4\pi^4$$

dla n całkowitych. A ponieważ $\lambda < 0$, to mamy ciąg wartości własnych (n - naturalne):

$$\lambda_n = -n^4\pi^4$$

i odpowiada im ciąg funkcji własnych

$$X_n(x) = B \cdot \sin \sqrt[4]{|\lambda_n|}x + D \cdot \sinh \sqrt[4]{|\lambda_n|}x = B \sin n\pi x + D \sinh n\pi x.$$

Zagadnienie własne zakończone, sam przykład równania cząstkowego można zakończyć *samodzielnie...*