**prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń**

## 0.1 Zadania cz. II.

**Zadanie 1.** Rozwiązać równanie:

$$\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

**Rozwiązanie:** Jest to równanie quasi-liniowe. Na razie pominiemy problem dziedziny równania, ograniczenie wynikające z istnienia pierwiastka $\sqrt{z-x-y}$ jest oczywiste. Niech funkcja $z=Z(x,y)$ będzie jego rozwiązaniem. Oznaczmy $u(x,y,z)=z-Z(x,y)$. Wtedy $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial Z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial u}{\partial z}=1$. Wstawiając do równania uzyskamy

$$-\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial z}$$

i stąd

$$\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

To już jest równanie liniowe z funkcją niewiadomą $u(x,y,x)$.

Układ równań charakterystyk:

$$\begin{aligned} x' &= 1+\sqrt{z-x-y}\\ y' &= 1\\ z' &= 2. \end{aligned}$$

Układ w postaci symetrycznej:

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}=dt$$

Układ zawiera **jedno** równanie różniczkowe (i jest o zmiennych rozdzielonych):

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Po całkowaniu: $\int\frac{dy}{1}=\int\frac{dz}{2}$, uzyskamy $2y=z+C_1$, a więc mamy całkę pierwszą:

$$u_1(x,y,z)=2y-z.$$

Warto zauważyć, że nie mamy drugiego równania różniczkowego w układzie. Zastosujemy metodę współczynników nieoznaczonych. Wykorzystam okazję do jej omówienia, rozważę przypadki, które widzę (mając pewne doświadczenie), że nie doprowadzą do rozwiązania - tak jak uczący się tej techniki Czytelnicy... Gdy ktoś zauważy krótsze rozwiązanie - to dobrze...

Nie widać zbyt naturalnych współczynników pozwalających na zerowanie się kombinacji mianowników... Kolejna próba, to dodanie do układu elementu zawierającego różniczkę (-ki) wyrażeń występujących w układzie. W tym przypadku to $1+\sqrt{z-x-y}$. Liczymy

$$d(1+\sqrt{z-x-y}) = -\frac{1}{2\sqrt{z-x-y}}dx - \frac{1}{2\sqrt{z-x-y}}dy + \frac{1}{2\sqrt{z-x-y}}dz,$$

a więc współczynnikami byłyby: $k_1 = -\frac{1}{2\sqrt{z-x-y}}$, $k_2 = -\frac{1}{2\sqrt{z-x-y}}$, $k_3 = \frac{1}{2\sqrt{z-x-y}}$. Uzyskamy taki układ:

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2} = \frac{d(1+\sqrt{z-x-y})}{-\frac{1}{2}}.$$

Kładąc pomocniczo $s = 1+\sqrt{z-x-y}$ uzyskamy

$$\frac{dx}{s} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2} = \frac{ds}{-\frac{1}{2}}$$

i możemy wybrać równanie różniczkowe do rozwiązania (różne od poprzedniego!), np.

$$\frac{dx}{s} = \frac{ds}{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad dx = -2s\,ds.$$

Ponownie jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, całkujemy obustronnie i uzyskamy $x = -s^2 + C_2$, wracamy do pierwotnych zmiennych i ostatecznie

$$x + 2(1+\sqrt{z-x-y}) = C_2.$$

Druga z całek pierwszych to

$$u_2(x,y,z) = x + 2(1+\sqrt{z-x-y}).$$

Sprawdzimy niezależność (funkcyjną) obliczonych całek pierwszych. Obliczamy:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = 2,\ \frac{\partial u_1}{\partial z} = -1$$

oraz

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 1 - \frac{1}{z-x-y},\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{1}{z-x-y},\ \frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{1}{z-x-y}.$$

Łatwo sprawdzić (naprawdę!), że rząd tej macierzy w obszarze, gdzie $z-x-y \neq 0$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1-\frac{1}{z-x-y} & -\frac{1}{z-x-y} & \frac{1}{z-x-y} \end{pmatrix}$$

wynosi 2, gdyż $0 - 2(1 - \frac{1}{z-x-y}) \neq 0$. Całki pierwsze są niezależne.

Rozwiązanie ogólne równania *liniowego* jest więc postaci

$$u(x,y,z) = F(2y - z, x + 2(1 + \sqrt{z-x-y}))\ ,\ \ F \in C^{(1)}.$$

My jednak mamy rozwiązać równanie quasi-liniowe, czyli rozwiązania $z$ uzyskiwane z powyższego wzoru uwikłanego spełniają nasze równanie (rozwiązania warunkowe) o ile $u(x,y,z) = z - Z(x,y) = 0$! Rozwiązania $z$ równania quasi-liniowego są więc uwikłane w

$$F(2y - z(x,y), x + 2(1 + \sqrt{z(x,y) - x - y})) = 0\ ,\ \ F \in C^{(1)}.$$

**Uwaga:** Wykorzystam przykład do zwrócenia uwagi, że podana metoda rozwiązywania równań quasi-liniowych nie daje *wszystkich* rozwiązań! Np. można sprawdzić, że funkcja

$$z(x,y) = x + y$$

**jest** rozwiązaniem równania quasi-liniowego, ale **nie jest** objęty powyższym wzorem.

**Uwaga:** Ponieważ "udało" się dobrać współczynniki nieoznaczone, to zadanie jest zakończone. Ale: *gdyby* ktoś szukał tych współczynników inaczej, to zwracam uwagę, że równie skuteczne byłoby wybranie "elementu" wyrażenia $1+\sqrt{z-x-y}$ występującego w układzie równań i dodanie prostszej różniczki. Np. $d(\sqrt{z(x,y) - x - y})$ albo wręcz $d(z-x-y)$ - łatwiejsza różniczka, ale będą nieco trudniejsze (?) równania...

Zestaw do pracy samodzielnej. Rozwiązać równania (w odpowiednich dziedzinach):

1. $$x\frac{\partial u}{\partial x} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (y+u)\frac{\partial u}{\partial z} = y + z$$

2. $$xy\frac{\partial u}{\partial x} - \sqrt{1-y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = xy\frac{\partial u}{\partial z}$$

3. $$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial x} = xy$$

4. $$(u-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x + y$$

5. $$(x+yz)\frac{\partial u}{\partial x} + (y+xz)\frac{\partial u}{\partial y} + (z+xy)\frac{\partial u}{\partial z} = x^2+y^2+z^2.$$