prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Zadania cz. III.

Zadanie 1. Pokazać, że następujące zagadnienie Cauchy'ego nie ma jednoznacznego rozwiązania:

$$2\cos x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \sin x \frac{\partial z}{\partial y} = z \sin x \ ,$$

gdzie krzywa Γ dana jest układem równań:

$$\Gamma \quad : \quad z = 0 \ , \ y = a \cdot \cos x,$$

gdzie a jest daną stałą.

Rozwiązanie. *Pominiemy tu etap linearyzacji problemu* i napiszemy od razu jego układ równań charakterystyk:

$$\frac{dx}{2\cos x} = \frac{dy}{2y \sin x} = \frac{dz}{z \sin x}.$$

Jest to układ dwóch równań zwyczajnych (o zmiennych rozdzielonych):

$$\operatorname{tg} x \ dx = \frac{dy}{y} \quad , \quad \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{z}$$

(uwaga na dziedzinę - funkcja tangens!). Rozwiązujemy równania (całkujemy obustronnie) i otrzymujemy

$$\ln|\cos x| + C_1 = \ln|y| \quad , \quad \ln|y| + C_2 = \ln z^2,$$

czyli całki pierwsze to

$$z_1(x,y) = \frac{y}{\cos x} \quad , \quad z_2(x,y) = \frac{z^2}{y}$$

(ich niezależność - do samodzielnego sprawdzenia). Na krzywej Γ mamy więc

$$\overline{C_1} = \frac{0^2}{y} = 0 \quad , \quad \overline{C_2} = \frac{a \cdot \cos x}{\cos x} = a.$$

Jak widać układu nie da się jednoznacznie rozwikłać względem x i y, a co więcej dla dowolnej funkcji φ klasy $C^{(1)}$ spełniającej $\varphi(a) = 0$ funkcja $z = z(x,y)$ zadana we wzorze:

$$\frac{z^2}{y} = \varphi\left(\frac{y}{\cos x}\right)$$

jest rozwiązaniem naszego zagadnienia Cauchy'ego. ta krzywa Γ nie zadaje jednoznacznego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.

Zadanie 2. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego: znaleźć rozwiązanie równania przechodzące przez krzywą Γ:

1. $$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 2xyz,$$

   gdzie $\Gamma \ : \ z(0,y) = y^2$.

2. $$(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

   gdzie $\Gamma \ : \ x = y = z$.

3. $$zy\frac{\partial z}{\partial x} + zx\frac{\partial z}{\partial y} + 2xy = 0,$$

   gdzie $\Gamma \ : \ z = 3 \ , \ x^2 + y^2 = 16$.

4. $$e^{-x}\frac{\partial z}{\partial x} + e^{-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z,$$

   gdzie $\Gamma \ : \ z(0,y) = e^{2y}$.

5. $$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4,$$

   gdzie $\Gamma \ : \ z(0,y) = y^2$.

6. $$(3y - 2u)\frac{\partial u}{\partial x} - 3x\frac{\partial u}{\partial y} = -2x,$$

   gdzie $\Gamma \ : \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ u = 0$.