0.1 Zadanie z metody d'Alemberta - ale nie dla równania struny...

Zadanie. Znaleźć rozwiązanie następującego zagadnienia:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \\ u(x,0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie. To zagadnienie można rozwiązać metodą d'Alemberta. Pierwszym krokiem metody jest znalezienie rozwiązania ogólnego. Równanie jest hiperboliczne (ale NIE JEST równaniem struny - gdyby ktoś myślał, że ta metoda pozwala rozwiązać zagadnienia tylko dla tego równania - por. też opublikowane zagadnienie z równaniem parabolicznym...).

Na tym przykładzie pokażemy dwie możliwości: poprzez bezpośrednie całkowanie (tu akurat można!) lub postać kanoniczną. Zrobimy bardzo (?) dokładnie i wyciągniemy wnioski...

Druga część (układ równań) będzie rozwiązana wspólnie dla obu prób.

I. Bezpośrednie całkowanie. Równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

można obustronnie całkować względem x - niektórzy autorzy lubią zapis

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

lub

$$(u_x - u_y)_x = 0.$$

Po całkowaniu uzyskamy

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = D_1(y)$$

z pewną funkcją D_1 zależną tylko od y (faktycznie: klasy $C^{(2)}$). To równanie różniczkowe cząstkowe I rzędu (liniowe niejednorodne). Rozwiążemy je. Tu pozwolimy sobie na opuszczenie rozpisywania układu równań charakterystyk i zapiszemy od razu ten układ w postaci symetrycznej:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{D_1(y)}.$$

Ma (prawie) natychmiast widoczne całki pierwsze:

$$C_1 = x + y \qquad , \qquad C_2 = D(y) + u$$

z funkcja dowolną D (klasy $C^{(2)}$). Stąd $F(x+y, D(y)+u(x,y)) = 0$ jest rozwiązaniem ogólnym tego równania, czyli w postaci bezpośredniej (z pewnymi funkcjami G_1 i G_2 klasy $C^{(2)}$)

$$u(x,y) = G_1(x+y) + G_2(y).$$

II. Postać kanoniczna. Teraz obliczamy

$$\Delta(x,y) = -\begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 1/4 > 0.$$

Równanie jest hiperboliczne, a jego równanie charakterystyk jest postaci:

$$(dy)^2 + dx\, dy = 0.$$

Czyli $dy = 0$ oraz $dy = -dx$. Stąd $C_1 = y$ i $C_2 = x + y$. mamy podstawienie

$$\xi = y \quad , \quad \eta = x + y.$$

Zamieniamy zmienne w równaniu (trochę skracamy tutaj rachunki...) i nie wypisujemy klas funkcji dowolnych, które pojawią się w rachunkach:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Stąd równanie przyjmie postać (uprzedzam pytających - po pomnożeniu obustronnym przez -1...)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Całkujemy obustronnie najpierw względem η

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = E_1(\xi)$$

i teraz względem ξ

$$u(\xi, \eta) = E_2(\xi) + E_3(\eta).$$

Wracamy do dawnych zmiennych

$$u(x, y) = E_2(y) + E_3(x + y),$$

a więc taką samą jak poprzednim sposobem... Pozostawmy symbole z tej wersji rozwiązania.

III. Układ równań. Najpierw obliczmy

$$\frac{\partial u}{\partial y} = E_2'(y) + E_3'(x + y).$$

Teraz uwzględniamy warunki początkowe:

$$x = u(x, 0) = E_2(0) + E_3(x)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = E_2'(0) + E_3'(x).$$

I teraz zauważmy, ze problem **nie ma jednoznacznego rozwiązania!** Każda funkcja postaci

$$u(x, y) = x + y + E_2(y) - E_2(0)$$

dla dowolnej funkcji E_2 klasy $C^{(2)}$ spełniającej warunek $E_2'(0) = -1$. Np. $E_2(y) = -y$ ($u(x, y) = x$), ale również dla $E_2(y) = -\sin y$ i wtedy $u(x, y) = x + y - \sin y$ itp.

Oczywiście - metoda d'Alemberta działa, a problem po prostu nie jest poprawnie postawiony i to tu wykazaliśmy.