0.1 Zadania różne - postać kanoniczna - 2.

Zadanie 3. Znaleźć obszary, w których równanie jest hiperboliczne, paraboliczne i eliptyczne (o ile takie istnieją): a)

$$xu_{xx} + 2u_{yy} - (y^2 + 3)u_x + u = 0,$$

b)

$$(x^2 - 1)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (1 + y^2)u_{yy} + 5u_x - \sqrt{x}u_y = 0.$$

Rozwiązanie:

ad a) Obliczamy

$$\Delta(x, y) = -\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y^2 + 3 \end{vmatrix} = -x(y^2 + 3).$$

Czyli badamy znak wyrażenia $-x(y^2 + 3)$ w punktach (x, y) i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) : x < 0\} \text{ hiperboliczne} \\ \Omega_2 &= \{(x, y) : x > 0\} \text{ eliptyczne.} \end{aligned}$$

Zbiór $\{(x, y) : x = 0\}$ nie jest obszarem, ale w takich punktach równanie jest postaci $2u_{yy} - (y^2 + 3)u_x + u = 0$, czyli jest paraboliczne.

ad b) Obliczamy

$$\Delta(x, y) = -\begin{vmatrix} x^2 - 1 & xy \\ xy & 1 + y^2 \end{vmatrix} = -(x^2 - 1) \cdot (1 + y^2) + x^2y^2 = 1 - x^2 + y^2.$$

Czyli badamy znak wyrażenia $1 - x^2 + y^2$. Uzyskamy:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) : 1 + y^2 > x^2\} \text{ hiperboliczne} \\ \Omega_2 &= \{(x, y) : 1 + y^2 < x^2\} \text{ eliptyczne.} \end{aligned}$$

Zbiór $\{(x, y) : 1+y^2 = x^2\}$ nie jest obszarem, ale w takich punktach równanie jest paraboliczne.