0.1 Zadania różne - postać kanoniczna.

Zadanie 1. Doprowadzić do postaci kanonicznej równanie:

$$u_{xx} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0.$$

Rozwiązanie. Określimy typ (typy) równania:

$$\Delta(x, y) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0,$$

czyli jest to równanie eliptyczne na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Równanie charakterystyk jest więc postaci:

$$(dy)^2 + 2(dx)^2 = 0,$$

czyli

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 = 0.$$

Podstawiamy $t = \frac{dy}{dx}$ i uzyskamy trójmian $t^2 + 2 = 0$. Jego wyróżnik to $\tilde{\Delta} = -8 (= 4 \cdot \Delta)$, a więc pierwiastki trójmianu (zespolone), to $t_1 = -i\sqrt{2}$ oraz $t_2 = i\sqrt{2}$. Oczywiście (dlaczego?) są to liczby zespolone sprzężone. Wobec tego wystarczy wybrać jedna z nich i uzyskamy

$$\frac{dy}{dx} = -i\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad dy = -i\sqrt{2}dx.$$

Całkujemy obustronnie uzyskując:

$$y = -i\sqrt{2}x + C_1$$

i całka pierwsza (zespolona) jest postaci

$$u_1(x, y) = y + i\sqrt{2}x$$

(uwaga: gdybyśmy rozpatrywali drugi z pierwiastków trójmianu uzyskalibyśmy całkę pierwsza sprzężoną). Biorąc część rzeczywistą i urojoną obliczonej całki dostaniemy szukane dla celów postaci kanonicznej podstawienie:

$$\xi = y \qquad , \qquad \eta = \sqrt{2}x.$$

Liczymy pochodne cząstkowe - do wstawienia do równania (bez specjalnych wzorów, tylko poprzez twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej)

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = \sqrt{2} u_\eta \\ u_y &= = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \\ u_{xx} &= = (u_x)_x = (\sqrt{2} \cdot u_\eta)_x = \sqrt{2}(u_{\eta\eta} \cdot \eta_x + u_{\xi\eta} \cdot \xi_x) = 2u_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= (u_y)_y = (u_\xi)_y = u_{\eta\xi} \cdot \eta_y + u_{\xi\xi} \cdot \xi_y = u_{\xi\xi} \end{aligned}$$

i stąd równanie jest w postaci

$$2u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\xi} - \sqrt{2} u_\eta + 4u_\xi + u = 0.$$

Po podzieleniu obustronnym przez 2 uzyskujemy **postać kanoniczną** (przypomnę: współczynniki przy pochodnych rzędu II w postaci kanonicznej muszą być równe 0 lub 1):

$$u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} - \frac{\sqrt{2}}{2} u_\eta + 2u_\xi + \frac{1}{2} u = 0.$$

Zadanie 2. Dane jest równanie

$$2u_{xx} + 2(x^2 + y^2)u_{xy} + (x^2 + y^2)u_{yy} + 4xu_x + 4e^y u_y = 0.$$

Określić typ równania w obszarze $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. Jaki będzie typ tego równania po zamianie zmiennych na

$$\xi = x^2 + y^2 + 4 \quad , \quad \eta = x \qquad ?$$

Rozwiązanie. Określimy typ (typy) równania:

$$\Delta(x, y) = - \begin{vmatrix} 2 & (x^2 + y^2) \\ (x^2 + y^2) & (x^2 + y^2) \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 < 0,$$

w obszarze Ω. Równanie jest eliptyczne w tym obszarze. Druga część nie wymaga obliczania pochodnych! Zauważmy, że zamiana zmiennych jest transformacją nieosobliwą:

$$|J|(x, y) = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2y$$

i w zadanym obszarze Ω mamy $|J| \neq 0$, transformacja jest nieosobliwa, więc typ równania (jako niezmiennik transformacji nieosobliwych) nie ulegnie zmianie: pozostanie eliptyczne.