0.1 Metoda charakterystyk - zadanie.

Przykładowe zadanie typu "wymagalnego na kolokwium" - z pełnym rozwiązaniem:

$$(y+z+u)u_x + (x+z+u)u_y + (x+y+u)u_z = x+y+z.$$

Niech $u = U(x,y,z)$ oznacza jego pewne rozwiązanie. Podstawiając: $w = u - U(x,y,z)$ i obliczając jej pochodne wstawiamy je do równania. Uzyskamy:

$$(y+z+u)w_x + (x+z+u)w_y + (x+y+u)w_z + (x+y+z)w_u = 0,$$

czyli równanie liniowe jednorodne.

Wprowadzając następujce oznaczenia:
$f_1(x,y,z,u) = y+z+u,\ f_2(x,y,z,u) = x+z+u,$
$f_3(x,y,z,u) = x+y+u,\ \ g(x,y,z,u) = x+y+z$
uzyskamy układ równań charakterystyk:

$$\begin{aligned} x' = f_1(x,y,z,u) &= y+z+u \\ y' = f_2(x,y,z,u) &= x+z+u \\ z' = f_3(x,y,z,u) &= x+y+u \\ u' = g(x,y,z,u) &= x+y+z. \end{aligned}$$

W postaci symetrycznej ma on postać:

$$\frac{dx}{y+z+u} = \frac{dy}{x+z+u} = \frac{dz}{x+y+u} = \frac{du}{x+y+z} = dt.$$

Tak dla symetryzacji zmiennych dodałbym (można inaczej!!) -
metoda współczynników nieoznaczonych: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$:

$$\frac{dx}{y+z+u} = \frac{dy}{x+z+u} = \frac{dz}{x+y+u} = \frac{du}{x+y+z} = \frac{d(x+y+z+u)}{3(x+y+z+u)}$$

Nie można jeszcze znaleźć pary dającej równanie różniczkowe.

Proponowane (nie moje...) współczynniki do dopisania to $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = k_4 = 0$ dają:

$$\frac{dx}{y+z+u} = \frac{dy}{x+z+u} = \frac{dz}{x+y+u} = \frac{du}{x+y+z} = \frac{d(x+y+z+u)}{3(x+y+z+u)} = \frac{d(y-x)}{-(y-x)}$$

Oczywiście ostatnia para daje łatwe równanie różniczkowe $ds/s = dt/(-t)$, gdzie $s = x+y+z+u$ oraz $t = y-x$. Rozwiązujemy je i przywaracamy zmienne x, y, z, u uzyskując całkę $w_1(x, y, z, u)$.

Analogiczne pary kolejnych zmiennych dają kolejne całki pierwsze w_2, w_3. (przypomnę też o postaci rozwiązania ogólnego i POWROCIE do równania quasi-liniowego!).

Uwaga: potrzeba 3 całek pierwszych niezależnych równania liniowego jednorodnego. Istnieje pewne ryzyko: jeżeli ktoś nie zauważył mojego pierwszego wyrażenia, to dodając do postaci symetrycznej tylko takie pary uzyska:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{y+z+u} &= \frac{dy}{x+z+u} = \frac{dz}{x+y+u} = \frac{du}{x+y+z} = \\ &= \frac{d(y-x)}{-(y-x)} = \frac{d(z-y)}{-(z-y)} = \frac{d(u-z)}{-(u-z)}.\end{aligned}$$

Ale stąd mamy tylko **2 całki pierwsze niezależne**! I tak trzeba by szukać trzeciej... Uwzględniając wcześniej dodany element układu równań będzie jednak trzy:

$$\frac{d(x+y+z+u)}{3(x+y+z+u)} = \frac{d(y-x)}{-(y-x)} = \frac{d(z-y)}{-(z-y)} = \frac{d(u-z)}{-(u-z)}$$

$$\frac{ds}{3s} = \frac{dt}{-t} = \frac{d\tau}{-\tau} = \frac{d\xi}{-\xi}$$

z oczywistymi podstawieniami zmiennych s, t, τ oraz ξ. Teraz mamy już równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych i wyliczamy:

$$w_1(s, t, \tau, \xi) = s \cdot t^3 \ , \ w_2(s, t, \tau, \xi) = s \cdot \tau^3 \ , \ w_3(s, t, \tau, \xi) = s \cdot \xi^3,$$

czyli po powrocie do zmiennych wyjściowych:

$$\begin{aligned} w_1(x, y, z, u) &= (x+y+z+u) \cdot (y-x)^3 \ , \\ w_2(x, y, z, u) &= (x+y+z+u) \cdot (z-y)^3 \ , \\ w_3(x, y, z, u) &= (x+y+z+u) \cdot (u-z)^3 . \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne to

$$w(x, y, z, u) = F((x+y+z+u) \cdot (y-x)^3, (x+y+z+u) \cdot (z-y)^3, (x+y+z+u) \cdot (u-z)^3)$$

dla funkcji F klasy $C^{(1)}$ na odpowiednim obszarze.

Niezależność tych całek proszę sprawdzić samodzielnie...