prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Funkcje zespolone.

Pochodna funkcji zmiennej zespolonej.

Załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest określona na pewnym otoczeniu punktu z_0. Wtedy

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Jeśli istnieje $f'(z_0)$, to funkcja $f(z)$ jest ciągła w z_0.

UWAGA: Dla funkcji zespolonych prawdziwe są twierdzenia o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, złożenia funkcji oraz odpowiednik twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej.

Jeśli funkcja $f(z)$ ma w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ pochodną $f'(z_0)$, to funkcje $u(x, y)$, $v(x, y)$ mają w punkcie (x_0, y_0) pochodne cząstkowe pierwszego rodzaju spełniające **równania Cauchy'ego-Riemanna:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Jeśli pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $u(x, y)$, $v(x, y)$ są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) i spełniają w tym punkcie równania Cauchy'ego-Riemanna, to funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ma pochodną w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$. Ponadto

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w punkcie z_0, jeśli ma pochodną w pewnym otoczeniu tego punktu. Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze, jeśli jest holomorficzna w każdym punkcie tego obszaru.

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze D, to jej część rzeczywista i urojona są funkcjami harmonicznymi w obszarze D, tzn. spełniają w nim równanie Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Jest też odwrotnie: każda funkcja harmoniczna w obszarze D jest częścią rzeczywistą (urojoną) pewnej funkcji holomorficznej.