

Zestaw 1.

Zadanie 1. Rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2l}x\right) + 3 \sin\left(\frac{7\pi}{2l}x\right),$$

gdzie a i l są stałymi dodatnimi.

Zadanie 2. Rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu + \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0,$$

gdzie a i l są stałymi dodatnimi.

Odp. $u(x, t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 + b} (1 - e^{-\left(\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 + b\right)t})$.

Zestaw 2.

Zadanie 1. Rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = x^3(l-x)^3, \quad u_t(x, 0) = 1,$$

gdzie c i l są stałymi dodatnimi.

Wsk. $\int_0^l x^3(l-x)^3 dx = \frac{l^6}{140}$, $\int_0^l x^3(l-x)^3 \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \frac{6l^6}{(\pi n)^4} ((-1)^n + 1) \left(1 - \frac{1}{(\pi n)^2}\right)$.

Zestaw 3.

Zadanie 1. Rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x), \quad u(0, t) = a, \quad u(l, t) = b, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

gdzie c i l są stałymi dodatnimi. Jakiej klasy musi być funkcja f ?

Wsk. Jakie są warunki zgodności w tym zagadnieniu?

Zadanie 2. Rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$u_t = u_{xx} + f(x), \quad u_x(0, t) = a, \quad u(l, t) = b, \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

gdzie a, b, l są stałymi dodatnimi, a funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe.

Wsk. Jakie są warunki zgodności w tym zagadnieniu?

Zestaw 4.

Zadanie 1. Rozwiązać zagadnienie Dirichleta w prostokącie:

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad \text{dla } x \in (0, a), y \in (0, b), \\u(0, y) = 0 &= u(a, y), \quad u(x, 0) = x(a - x), \quad u(x, b) = 3 \sin \frac{\pi x}{a}\end{aligned}$$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi.

Zestaw 5.

Zadanie 1. Rozwiązać zagadnienie Dirichleta:

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= x, \quad \text{dla } 1 < x^2 + y^2 < 4, \\u|_{\partial(B(0,2) \setminus B(0,1))} &= 0.\end{aligned}$$

Polecam:

<http://im0.p.lodz.pl/~bprzeradzki/zadaniazrrcz.pdf>