prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

0.1 Rozwiązane zadanie...

Rozwiążę przykładowo zadanie z zestawu, gdzie równanie jest niejednorodne z warunkami jednorodnymi. Tak przy okazji pokażę, ze proponowane przykłady są naprawdę nieskomplikowane i specjalnie dobrane, aby były krótkie...

Zestaw 1 - zadanie 2. Mamy równanie (niejednorodne):

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu + \sin \frac{\pi x}{l}$$

z warunkami brzegowymi (jednorodnymi):

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\ ,\ u(x,0) = 0.$$

Rozwiązanie. Ponieważ równanie jest niejednorodne, to najpierw zbadamy zagadnienie z równaniem jednorodnym

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu\ , u(0,t) = u(l,t) = 0\ ,\ u(x,0) = 0.$$

Rozdzielamy zmienne: szukamy funkcji postaci $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Wstawiamy do równania:

$$T'(t) \cdot X(x) = a^2 X''(x) \cdot T(t) - bX(x) \cdot T(t),$$

czyli po rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + b = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Obie strony zależą tylko od jednej (i różnej) zmiennej, wiec są stałe:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + b = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Mamy dwa równania, a po wykorzystaniu warunków brzegowych $u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0$, czyli $X(0) = 0$ i analogicznie $(X(l) = 0$

$$X'' - \frac{\lambda}{a^2} X = 0\ ,\ X(0) = 0\ ,\ X(l) = 0.$$

Rozwiążmy je: wielomian charakterystyczny to $W(s) = s^2 - \frac{\lambda}{a^2}$, a więc układ fundamentalny rozwiązań jest postaci $e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x}$ i $e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x}$, czyli rozwiązanie

$$X(x) = A \cdot e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x} + B \cdot e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x}.$$

Skoro $X(0) = 0$ to $0 = A \cdot e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{a}0} + B \cdot e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}0}$, a więc $A + B = 0$ i ostatecznie $B = -A$. Czyli $X(x) = A \cdot (e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x} - e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x})$. Z drugiego warunku brzegowego $X(l) = 0 = A \cdot (e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l} - e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l})$. Skoro $A \neq 0$ (bo wówczas $X(x) \equiv 0$), to

$$e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l} - e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l} = 0$$

$$e^{2\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l} - 1 = 0.$$

Jeśli byłoby $\lambda \geqslant 0$ to równie miałoby tylko zerowe rozwiązanie, czyli odpada, a więc warunkiem istnienia ciągu wartości własnych jest $\lambda < 0$. Wtedy powyższe równanie jest postaci

$$e^{2\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l \cdot i} = 1$$

i ma ono rozwiązania

$$2\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l = 2\pi n$$

dla n całkowitych. Mamy więc ciąg różnych wartości własnych (n - naturalne)

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 a^2 n^2}{l^2}.$$

Ze względu na postać funkcji tworzącej niejednorodność w równaniu korzystniej będzie użyć postaci trygonometrycznej rozwiązania:

$$X(x) = C \cdot \cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + D \cdot \sin(\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x)$$

czyli z warunku $X(0) = 0$ wynika $C = 0$ oraz

$$X(x) = D \cdot \sin(\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x),$$

a z wyliczonymi wartościami własnymi uzyskamy **ciąg funkcji własnych**:

$$X_n(x) = D_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}.$$

Teraz wrócimy do zagadnienia (wstawiamy wartości własne):

$$(T_n)' + (b - \lambda_n) \cdot T_n = 0 \ , \ T(0) = 0.$$

Równanie jest o zmiennych rozdzielonych, a więc

$$\ln|T_n| = (\lambda_n - b) \cdot t + \tilde{E}_n \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = E_n \cdot e^{(\lambda_n - b)t},$$

gdzie E_n jest stała dowolną.

Szukamy wiec rozwiązań postaci

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n D_n \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda_n}}{a} x\right) \cdot {\color{blue} e^{(\lambda_n - b)t}}$$

czyli

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n D_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot {\color{blue} e^{-(\frac{\pi^2 a^2 n^2}{l^2} + b)t}}$$

Zauważmy, że $X_n''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$.

Wracamy do równania niejednorodnego i rozwijamy funkcję $g(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$ w szereg Fouriera względem wyliczonego układu funkcji własnych. Bez specjalnych wzorów:

$$\sin\frac{\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}$$

z oczywistym $a_1 = 1$, $a_k = 0$ dla $k > 1$...

Liczymy pochodne cząstkowe (zakładamy, że możemy...) i wstawiamy do równania:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n'(t) - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n''(x) \cdot T_n(t) - b \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = X_1(x).$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n'(t) - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n''(x) \cdot T_n(t) - b \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = X_1(x).$$

Ostatecznie (pozostałe T_k muszą być zerowe...):

$$T_1'(t) + \left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} + b\right) T_1(t) = 1.$$

Rozwiązujemy równanie (liniowe!). Uzmienniamy stałą: równanie *jednorodne* ma rozwiązanie $T_1(t) = E \cdot e^{-(\frac{a^2\pi^2}{l^2} + b)t}$, czyli $T_1(t) = E(t) \cdot e^{-(\frac{a^2\pi^2}{l^2} + b)t}$, wstawiamy do pełnego równania i obliczamy uwzględniając $T_1(0) = 0$:

$$T_1(t) = \frac{1}{\frac{a^2\pi^2}{l^2} + b} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} + b\right)t}\right).$$

Rozwiązanie jest wiec postaci

$${\color{red} u(x,t) = \sin\frac{\pi x}{l} \cdot \frac{1}{\frac{a^2\pi^2}{l^2} + b} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} + b\right)t}\right).}$$

Można było krócej, ale nie chciałem nic "zauważać"... (niebieskie części można oczywiście opuścić lub nie rozpisywać).