prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń 2019/2020

Metoda rozdzielania albo separacji zmiennych, zwana też metodą Fouriera, jest jedną z najstarszych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych.

Polega ona na próbie wyznaczenia rozwiązania danego równania w postaci kombinacji funkcji o mniejszej ilości zmiennych. Jak już wiemy, najczęściej szukamy rozwiązania w postaci **sumy** lub **iloczynu** funkcji. W szczególności, jeśli szukane rozwiązanie u jest funkcją zmiennych x i t, , to rozwiązania tego możemy szukać w postaci iloczynu dwóch funkcji z których jedna jest funkcją zmiennej x, a druga zmiennej t.

Metoda ta jest szczególnie przydatna, jeśli szukamy rozwiązania w zbiorze ograniczonym o zadanych wartościach na brzegu obszaru (w przypadku przedziałów nieskończonych prowadzi to raczej do metod opartych o transformacje - a to poza naszym kursem...).

Na ogół podajemy ją odrębnie np. dla równania struny ograniczonej i odrębnie dla równań eliptycznych. W tym materiale zrobimy to raz, ale - jak zawsze - zwracając uwagę na warunki KONIECZNE stosowalności metody.

Zinterpretujemy to poniżej rozważając równanie struny ograniczonej jednorodnej o jednorodnych warunkach brzegowych.

Rozważmy równanie struny

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi $u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0$
oraz warunkami początkowymi $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$

Przyjmujemy przy tym (tzw. warunki zgodności), że $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0.$

Na początku (jak się okaże to trzeba uogólnić) szukamy rozwiązania w postaci

$$u(x,t) = T(t)X(x).$$

Podstawiając ostatnią funkcje do równania (1) otrzymamy $T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$. Przyjmując, że $T \neq 0$ i $X \neq 0$ możemy ostatnie równanie przekształcić do postaci

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ponieważ lewa strona zależy tylko od t, zaś prawa strona tylko od x, zatem oba ilorazy muszą być równe stałej (! Warunek stosowalności metody). Oznaczając tę stałą przez λ proszę nie wierzyć, że mamy już teraz znać jej znak - dyskusja o stałej - później!), ostatnią równość możemy zapisać w postaci dwóch równań:

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) - \lambda X(x) = 0. \tag{2}$$

Ponadto z warunków brzegowych (wstawiamy, zauważmy, że możemy to zrobić TYLKO dla jednego z równań, drugim zajmiemy się później) wynika natychmiast, że

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{3}$$

Mamy zagadnienie Sturma-Liouville'a: równanie różniczkowe zwyczajne II rzędu z warunkiem "brzegowym"(dwupunktowym). Cel: znaleźć (o ile istnieją!) ciąg wartości własnych tego zagadnienia i odpowiadający im ciąg funkcji własnych - to one posłużą do konstrukcji rozwiązania). To ma być ciąg, a nie pojedyncza wartość, więc badać będziemy warunek na stałą λ. Dla równania struny oznacza to badanie znaku, ale w całej ogólności, to zależy od równania. Dla przypomnienia: wartości własne zagadnienia to takie wartości λ dla których istnieją niezerowe rozwiązania równania. W tej metodzie interesują nas zagadnienia posiadające ciąg wartości własnych $\lambda_1 < \lambda_2 < ....$ Każdej z nich odpowiada dokładnie jedna unormowana funkcja własna (tj. o normie 1).

Zrobimy to trochę bardziej uniwersalnie niż w typowych podręcznikach. Ogólnie: musimy rozwiązać badane zagadnienie II rzędu. Tu jest ono o stałych współczynnikach, więc wielomian charakterystyczny (przypomnieć sobie metodę!) jest postaci

$$k^2 - \lambda = 0$$

co oznacza, że ma dwa pierwiastki $k_1 = \sqrt{\lambda}$ i $k_2 = -\sqrt{\lambda}$. Pytanie: czy to liczby rzeczywiste czy zespolone? To istotne pytanie. Układ fundamentalny rozwiązań ma oczywiście postać: $\cdot e^{k_1 x}$ oraz $\cdot e^{k_2 x}$, czyli rozwiązanie ogólne

$$X(x) = A \cdot e^{k_1 x} + B \cdot e^{k_2 x} = A \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + B \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Z warunków brzegowych uzyskamy $0 = X(0) = A \cdot e^{\sqrt{\lambda}\cdot 0} + B \cdot e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 0} = A + B$ oraz $0 = X(l) = A \cdot e^{\sqrt{\lambda}l} + B \cdot e^{-\sqrt{\lambda}l}$. Czyli $B = -A$ i stąd $0 = B \cdot (e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l})$. Ale $B \neq 0$ (bo wtedy $A = -B = 0$ i $X(x) = 0$ - sprzeczność, bo szukamy niezerowych rozwiązań). Stąd: $e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$ i dalej mnożąc obustronnie przez $e^{\sqrt{\lambda}l}$ uzyskamy $e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1$.

Jasne, że dla $\lambda \geqslant 0$ mamy tylko jedno rozwiązanie (wykładnik zerowy!). Pozostaje rozważyć $\lambda < 0$ (dopiero to jest moment, kiedy coś możemy stwierdzić o stałej λ, a nie od początku “zauważmy, że..."!!).

Całość poprzedźmy uwagą, że możemy - podobnie jak wyżej rozwiązać równanie z funkcją $T(t)$: równanie charakterystyczne

$$k^2 - \lambda a^2 = 0$$

da rozwiązania $T(t) = C \cdot \cdot e^{\sqrt{\lambda}ax} + D \cdot e^{-\sqrt{\lambda}ax}$.

Typową metoda uproszczenia sobie zapisu jest skorzystanie ze wzorów Eulera i zastąpienie funkcji z układu fundamentalnego przez funkcje trygonometryczne.

Rozwiązania mają wówczas postać $T(t) = C_* \cos(\lambda at) + D_* \sin(\lambda at)$,$X(x) = A_* \cos(\lambda x) + B_* \sin(\lambda x)$ (stałe mają inny symbol niż wyżej, bo uwzględniają wzory Eulera, ale to nadal stałe dowolne!). Łatwiej (??) będzie rozwiązywać układy równań (uwaga: **można pozostać przy dawnej postaci**, w wielu przypadkach to nawet konieczne). Dla uproszczenia zapisu pomińmy dalej “gwiazdki":

$$T(t) = C \cos(\lambda at) + D \sin(\lambda at), \quad X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Z warunku $X(0) = 0$ wynika, że $A = 0$, a warunek $X(l) = 0$ daje równość $\sin(\lambda l) = 0$, która jest spełniona dla $\lambda l = n \cdot \pi$, czyli $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Wartości te nazywamy **wartościami własnymi**. Zauważmy, że tylko dla takich wartości λ może istnieć - i istnieje - szukane rozwiązanie!! (mamy spełniony warunek dla metody: ciąg wartości własnych i odpowiadających im funkcji własnych $X_n(x)$ będących układem ortonormalnym zupełnym).

A co jeśli nie zmieniliśmy postaci na trygonometryczną? Nie ma problemu: mieliśmy równanie $e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1$. Dla $\lambda < 0$ oznacza to $e^{2i\sqrt{-\lambda}l} = 1$, a przypomnę (ze wzorów Eulera), że $e^{iy} = 1$ oznacza $y = 2n\pi$ i dalej jak poprzednio...

Dla $n \in \mathbb{N}$ położmy $T_n(t) = C_n \cos(\frac{na\pi}{l}t) + D_n \sin(\frac{na\pi}{l}t)$, $\quad X_n(x) = A_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$ oraz

$$u_n(x,t) = \Big(A_nC_n \cos(\frac{na\pi}{l}t) + A_nD_n \sin(\frac{na\pi}{l}t)\Big) \sin(\frac{n\pi}{l}x) \tag{4}$$

(indeksy n oznaczają, ze dla każdej wartości własnej λ_n stałe są inne.

Zauważmy, że tak określona funkcja u_n jest rozwiązaniem równania (1), spełnia warunki brzegowe, ale na ogół nie spełnia warunków początkowych!!

Mamy zatem spełnianie warunków stosowania metody: dało się rozdzielić zmienne (dwa równania), jedno z nich było zagadnieniem Sturma-Liouville'a i znaleźliśmy jego ciąg (!) wartości własnych (λ_n) i funkcji własnych (X_n) tworzących układ ortonormalny zupełny. Teraz musimy skorzystać z drugiego z równań i warunków brzegowych.

Aby to wykonać na ogół (patrz powyższa uwaga) nie wystarcza funkcje u_n, więc sięga się po szereg Fouriera (tu: samych sinusów, ale ogólnie: nawet szeregi Fouriera z wagami...)!

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t). \tag{5}$$

Ogólna idea: rozwinąć funkcje występujące w warunkach brzegowych i dobrać współczynniki w funkcjach u_n.

Załóżmy, że szereg po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny jak również szereg pierwszych i drugich poch|odnych jest jednostajnie zbieżny do odpowiedniej pochodnej z funkcji u. . Przy przyjętych założeniach pochodne szeregu są równe szeregowi pochodnych, a funkcja u spełnia równanie (1) oraz warunki brzegowe.

Oczywiście $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_nC_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$.

Załóżmy dalej, że funkcje φ można rozwinąć w szereg Fouriera (sinusów) w przedziale $[0,l]$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

(dokładniej: szereg Fouriera względem układu ortonormalnego funkcji własnych!!),

gdzie (patrz: wzory Fouriera) $\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds$.

Zauważmy, że pierwszy z warunków początkowych $u(x,0) = \varphi(x)$ jest spełniony, jeśli $A_nC_n = \alpha_n$ (równość szeregów Fouriera), czyli

$$A_nC_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds.$$

W celu zapewnienia drugiego z warunków początkowych należy policzyć pochodną z funkcji u względem t (o ile to wykonalne).

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na\pi}{l}\Big(- A_n C_n \sin(\frac{na\pi}{l}t) + A_n D_n \cos(\frac{na\pi}{l}t)\Big) \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Stąd $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na\pi}{l} A_n D_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$.

Rozwijając funkcje ψ w szereg Fouriera względem układu funkcji własnych (tu: sinusów) otrzymamy $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$, gdzie $\beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds$.

Zatem drugi z warunków początkowych jest spełniony, jeśli $\frac{na\pi}{l}A_n D_n = \beta_n$, czyli

$$A_n D_n = \frac{2}{na\pi}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds.$$

Ostatecznie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{2}{l}\int_0^l \Big(\varphi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)\Big)ds\,\cos(\frac{na\pi}{l}t) + \\ + \frac{2}{na\pi}\int_0^l \Big(\psi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)\Big)ds\,\sin(\frac{na\pi}{l}t)\Bigg]\sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

UWAGI dodatkowe:

Kładąc $\rho_n = \sqrt{(A_nC_n)^2 + (A_nD_n)^2}$, $\cos(\widetilde{\varphi}_n) = \frac{A_nC_n}{\rho_n}$, $\sin(\widetilde{\varphi}_n) = \frac{A_nD_n}{\rho_n}$, $\varphi_n = \frac{l}{na\pi}\widetilde{\varphi}_n$, otrzymamy $u_n(x,t) = \rho_n \cos\big(\frac{na\pi}{l}(t-\varphi_n)\big)\sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big)$.

Funkcja u_n opisuje drgania harmoniczne (tzw. n-ta harmoniczna) odpowiadające wartości własnej $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, przy czym występujące tu wielkości mają następującą interpretacje fizyczną:

$\rho_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$ – amplituda drgania n-tej harmonicznej;

$\omega_n = \frac{na\pi}{l}$ – częstotliwość drgania n-tej harmonicznej.

Pamiętając że $a^2 = \frac{T}{\rho}$, gdzie T oznacza siłę naprężenia a ρ gęstość, otrzymamy

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Częstotliwość $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ odpowiada tzw. dźwiękowi podstawowemu (zwanemu też pierwszą harmoniczną). Jest to dźwięk najsilniejszy. Melodia struny zależy natomiast od dalszych dźwięków uzupełniających.

Jeśli $A_1C_1 = \ldots = A_{n-1}C_{n-1} = 0$ oraz $A_1D_1 = \cdots = A_{n-1}D_{n-1} = 0$, natomiast $A_nC_n \neq 0$ lub $A_nD_n \neq 0$, dźwięk podstawowy odpowiada częstotliwości ω_n. Wynika stąd, że dźwięk struny zależy od warunków początkowych $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ oraz wielkości l, T i ρ.

Na zakończenie zasygnalizuję ograniczenia metody (założenia były wskazywane na czerwono, funkcje początkowe spełniają założenia...). I najważniejsze: w miejsce funkcji kładliśmy odpowiadające im szeregi Fouriera. Ale przecież funkcja nie musi być równa swojemu szeregowi Fouriera!!

Zainteresowanych proszę o sprawdzenie JAKIE założenia musi spełniać funkcja, aby ta własność zachodziła. Na zakończenie tej części proszę o zwrócenie uwagi, że uzyskana taka metodą funkcja $u(t,x)$ w ogólnym przypadku wcale nie musi być rozwiązaniem wyjściowego zagadnienia (problemy z różniczkowalnością szeregów funkcyjnych!!)! To prowadzi do nowej klasy rozwiązań (już nie: klasycznych), dla których ta metoda ma szersze zastosowanie. Ale tu potrzeba dystrybucji zamiast funkcji (rozwiązania słabe)...

Uwaga końcowa: metoda świetnie sprawdza się np. w równaniu Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

z warunkami Dirichleta: zmienne się rozdzielają itd. To istotne, bo do równań eliptycznych nie da się zastosować metody d'Alemberta. Ale o tym: nieco później (i ciekawsze przykłady)...