Przeanalizujmy zadanie z podręcznika Janus-Myjak:

PRZYKŁAD 3.10. Znaleźć całkę ogólną równania

$$(y+z)u_x + yu_y + (x-y)u_z = 0.$$

Równania charakterystyk mają postać:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}.$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{d(x+z)}{x+z} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{d(x-y)}{z} = \frac{dz}{x-y},$$

1) Zauważmy, ze układ równań charakterystyk nie składa się z równań różniczkowych podlegających rozwiązaniu (każde z 3 równań zawiera 2 różniczki, ale 3 zmienne). Nie można tak rozwiązać…
2) Nie patrzymy na razie na rozwiązanie poniżej, bo „nie wiemy” skąd takie równania…
3) Dobieramy współczynniki nieoznaczone:
   a) Ja bym rozpoczął od wyzerowania kombinacji mianowników, ale to w tym przypadku niewiele daje – warto próbować… W wyniku prób trzeba zauważyć, że środkowy element jest „dobry” (k2 = 0), można spróbować k1= 1, k3 =1. Pojawi się różniczka jak w rozwiązaniu: d(x+z)/x+z i pierwsze z równań…
   b) Druga próba: dodajemy wyrażenie z różniczką mianownika: np. d(y+z), czyli k1 = 0, k2 = 1, k3 = 1, dodaliśmy d(y+z)/x do układu. Zauważmy, że porównując pierwszą proporcję dx/(y+z) z ostatnią d(y+z)/x uzyskamy (y+z)d(y+z) = xdx , czyli s = y+z czyli sds = xdx → całkujemy obustronnie. Uzyskamy ½ s^2 = ½ x^2 + C , a więc ½ $(y+z)^2$ - ½ x^2 = C i całkę pierwszą u(x,y,z) = $(y+z)^2 - x^2$.
   Nie jest to żadna z całek obliczonych w rozwiązaniu zadania – czyli nieprawda jest, ze trzeba „wpaść” na to co autor… Proszę tak poszukać drugiej z całek niezależnych…
   c) Teraz skąd rozwiązanie autorów: dobrali współczynniki do różniczki d(x-y) (jest w równaniu, tak można zrobić w punkcie b)), a ostatnie współczynniki z różniczki (x+z) powstałej po dopisaniu jak w a)…

I właśnie do prób zachęcam: mam przykłady, gdzie świetnie działają zupełnie różne zestawy współczynników nieoznaczonych (w tym samym równaniu)…