

Równania różniczkowe cząstkowe - zagadnienia.

prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń

1) Równanie różniczkowe cząstkowe. Rząd równania. Rozwiązania i ich definicje.

Podać własne przykłady lub kontrprzykłady na ww. pojęcia. Sprawdzić czy podane funkcje są rozwiązaniami podanych (lub jakichkolwiek) równań. Podać rzędy podanych równań.

2) Całki pierwsze układu równań różniczkowych zwyczajnych. Związek z równaniem różniczkowym cząstkowym.

Znaleźć całki pierwsze danych układów równań. Postacie symetryczne układów równań.

3) Metody bezpośredniego całkowania i rozdzielania zmiennych (suma i iloczyn).

Znajdź rozwiązania podanych ównań. określ, czy to wszystkie rozwiązania.

4) Całki pierwsze niezależne. Ogólna postać całki pierwszej (z dowodem).

Zbadaj niezależność danych całek pierwszych. Określ ile całek pierwszych niezależnych ma dany układ równań.

5) Rozwiązywanie równań różniczkowych I rzędu - liniowych, jednorodnych - schemat postępowania. Metoda charakterystyk.

Znajdź całki pierwsze niezależne danych równań. Zbadaj przypadki, gdy układ równań w postaci symetrycznej:

a) *składa się z równań różniczkowych (dwa przypadki: gdy można je analitycznie rozwiązać i gdy to niemożliwe (na danym poziomie wiedzy),*

b) *co najmniej część całek pierwszych nie da się obliczyć jako rozwiązanie r.r.z. i trzeba zastosować współczynniki nieoznaczone:*

- *dobór według zerowanie kombinacji mianowników i różniczki zupełnej jako kombinacji liczników,*

- *dodawanie wyrażeń z różniczkami wyrażeń występujących w układzie,*

- *wykorzystanie znalezionych wcześniej całek pierwszych do uzyskania równania różniczkowego zwyczajnego...*

6) Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania jednorodnego cząstkowego I rzędu.

Określanie kiedy zadany warunek daje jednoznaczne rozwiązanie, jest sprzeczny i nieoznaczony. Procedura rozwiązywania w zależności od rodzaju warunku (ustalona zmienna, krzywa zadana parametrycznie itp.). Rozwiązywanie zagadnień.

7) Rozwiązywanie równań quasi-liniowych (redukcja do równania liniowego - z uzasadnieniem).

Rozwiązania warunkowe. Procedura przejścia do równań liniowych jednorodnych.. rozwiązywanie równań quasi-liniowych.

8) *Lemat o istnieniu całek pierwszych klasy C^2 z nieznikającą pochodną I rzędu w Ω .*

9) *Lemat o ciągłości przybliżeń (do tw. o ciągłej zależności od war. pocz.).*

(**) *uwaga: punkty 8) i 9) nie obowiązują w roku 2019/2020 !*

10) Klasyfikacja równań cząstkowych II rzędu funkcji dwóch zmiennych.

Cele klasyfikacji. Niosobliwe zamiany zmiennych. Postacie kanoniczne poszczególnych typów równań. Określanie typu równania w zadanym obszarze. Określanie obszarów, w których jest danego typu.

11) *Wyprowadzenie (nie 2019/20 !! wzorów transformacyjnych.*

Cel minimalny: równanie charakterystyk. Powiązanie celu stosowania podstawień opartych o całki pierwsze równania charakterystyk z zerowaniem współczynników przy pochodnych II rzędu po podstawieniu.

12) Sprowadzanie równań do postaci kanonicznej (różnych typów).

... w różnych obszarach...

13) Funkcje własne i wartości własne zagadnienia brzegowego dla równań r. zwyczajnych.

Zagadnienia Sturm-Liouville'a. Obliczenie ciągów wartości własnych i funkcji własnych zadanych zagadnień.

14) Rozwiązanie równania struny nieograniczonej (metoda d'Alemberta).

Określenie podstawowych warunków stosowalności metody (nie tylko dla równania struny). Schemat postępowania: zwłaszcza kroków po znalezieniu rozwiązania ogólnego. Rozwiązywanie zagadnień początkowych daną metodą.

15) Metoda Fouriera rozdzielania zmiennych - schemat postępowania dla równania struny ograniczonej.

Określenie podstawowych warunków stosowalności. Rozdzielanie zmiennych. Szeregi Fouriera w przestrzeni wagowej. Obliczanie warunku na istnienie przeliczalnej ilości wartości własnych. Obliczanie ciągu wartości własnych. Obliczanie ciągu funkcji własnych. Rozwiązania w postaci szeregów Fouriera.

16) Zagadnienia dobrze i źle postawione.

Rola warunków i przykłady.

17) Typy zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych (Dirichleta, Neumanna, Robin = trzecie zagadnienie brzegowe, mieszane ...).

Rozpoznawanie typów zagadnień. Zagadnienia zewnętrzne. Analiza rozwiązalności zagadnień.

18) Metoda Fouriera rozdzielania zmiennych dla równań eliptycznych. Funkcje i wartości własne równania Laplace'a. Zagadnienie Dirichleta dla prostokąta - schemat rozwiązywania.

Rozkład zagadnień na jednorodne i niejednorodne z jednorodnymi warunkami brzegowymi. Rozkład zagadnień na prostokącie na niemal jednorodne (jedna niezerowa krawędź). Rozwiązywanie zadań dla prostokąta.

19) Zagadnienie Dirichleta dla koła i innych obszarów (metoda siatek).

Zamiana zmiennych. Równania i warunki brzegowe po zamianie zmiennych. Opcjonalnie: zespolone równania różniczkowe (funkcje harmoniczne jako części rzeczywiste funkcji holomorficzych). Schematy różnicowe dla równań cząstkowych. Rozwiązania prostych zagadnień dla obszarów nieregularnych metodą siatek.

20) Równanie Laplace'a, funkcje harmoniczne, twierdzenie o kresach funkcji harmonicznej, zasada ekstremum.

Funkcje harmoniczne i ich własności. Związki z funkcjami holomorficznymi. przykłady i zastosowania: jednoznaczność rozwiązań zagadnienia Dirichleta (z dowodem) i Neumanna - warunki.

21) Twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej - schemat dowodu.

Znaczenie twierdzenia. Postać normalna. Szczególne przypadki. Zastosowanie do metody szeregów potęgowych.

22) Równanie Poissona i zagadnienie Dirichleta dla tego równania.

Wybrane podstawienia... rozwiązania wybranych zagadnień i przykładów. (nie: 2019/20)

23) Inne metody (np. wariacyjne) - wg. możliwości czasowych...