Funkcje wielu zmiennych

wykład z MATEMATYKI

Automatyka i robotyka
studia niestacjonarne
sem. II, rok ak. 2009/2010

Katedra Matematyki
Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka

Niech $\boxed{\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_n \in \mathbb{R}\ \}}$.

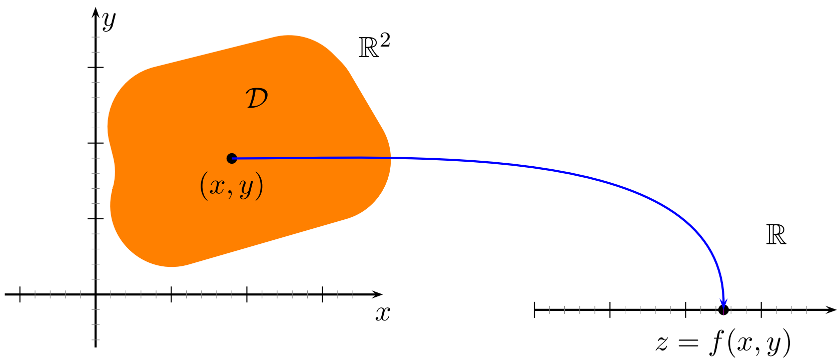
Funkcją n zmiennych określoną na zbiorze $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru $\mathcal{D}$ dokładnie jednej liczby rzeczywistej.
`Funkcję taką oznaczamy przez`

$$\boxed{f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}} \quad \text{lub} \quad \boxed{w = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \text{ gdzie } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}.$$

Wartość funkcji f w punkcie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oznaczamy przez $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

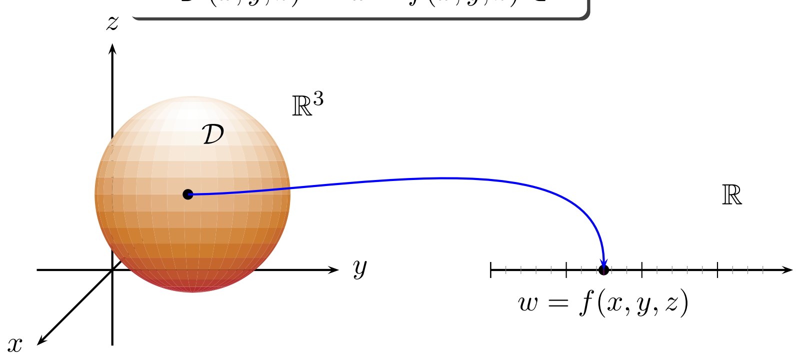
Dla $n = 2$ mamy funkcję dwóch zmiennych $\boxed{z = f(x, y)}$

$$\boxed{\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}}$$



Dla $n = 3$ mamy funkcję trzech zmiennych $\boxed{w = f(x, y, z)}$

$$\boxed{\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}}$$



1 Dziedzina, wykresy i warstwice funkcji wielu zmiennych

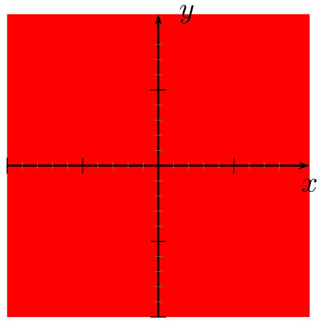
Zbiór wszystkich punktów przestrzeni $\mathbb{R}^n$, dla których funkcja f jest określona nazywamy ***dziedziną funkcji f*** i oznaczamy przez $\mathcal{D}_f$.

Jeżeli dany jest wzór określający funkcję, to zbiór punktów przestrzeni $\mathbb{R}^n$, dla których wzór ten ma sens, nazywamy ***dziedziną naturalną funkcji***.

Przykład 1.1 (Przykłady funkcji dwóch zmiennych).

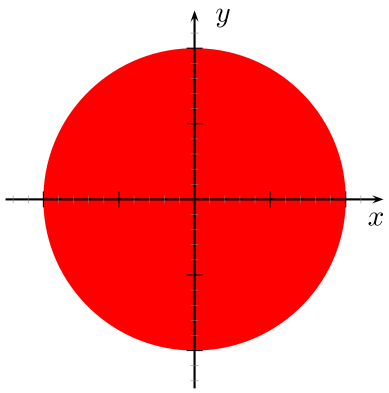
☞Niech $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Wówczas $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.

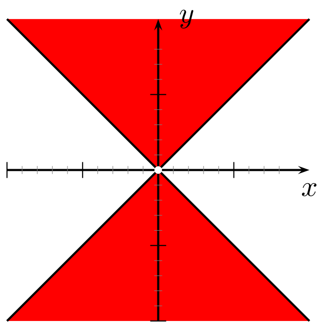


☞Niech $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

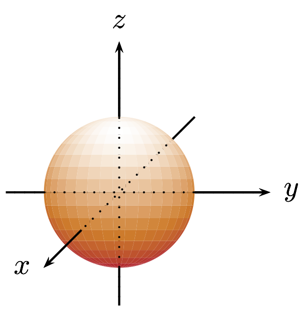
Wówczas $\mathcal{D}_f = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.



☞Niech $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$. Wówczas $\mathcal{D}_f = \{(x,y):\ -1 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 1\ \wedge\ y \neq 0\}$.



Przykład 1.2 (Przykład funkcji trzech zmiennych).
Niech $g(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. Wówczas $\mathcal{D}_g = \{(x,y,z):\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.



Przykład 1.3 (Inne przykłady funkcji wielu zmiennych).

- Natężenie I prądu w oporniku o oporze R jest według prawa Ohma funkcją napięcia U, przyłożonego do zacisków tego opornika, oraz oporu R, tzn.

$$I = \frac{U}{R}.$$

- Temperatura T w punkcie $P(x, y, z)$ ogrzewanego ciała w chwili t jest funkcją czterech zmiennych, mianowicie tego punktu oraz czasu t, tzn.

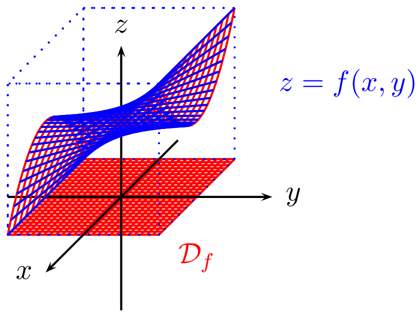
$$T = T(x, y, x, t).$$

Wykresem funkcji n-zmiennych nazywamy zbiór

$$\{(x_1, \ldots, x_n, w) : \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f \wedge w = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

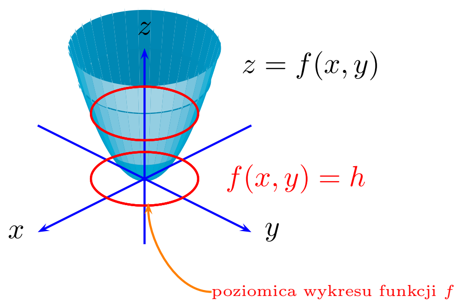
Dla $n = 2$

$$\{(x, y, z) : \ (x, y) \in \mathcal{D}_f \wedge z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$



Poziomicą wykresu funkcji dwóch zmiennych $z = f(x, y)$ odpowiadającą poziomowi $h \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$\{(x, y) : \ (x, y) \in \mathcal{D}_f \wedge f(x, y) = h\} \subset \mathbb{R}^2.$$

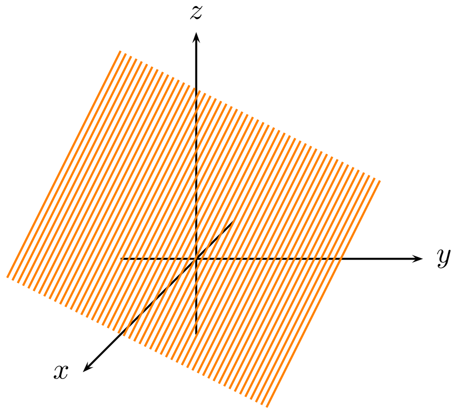


Warstwicą wykresu funkcji $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 3$ odpowiadającą warstwie $h \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

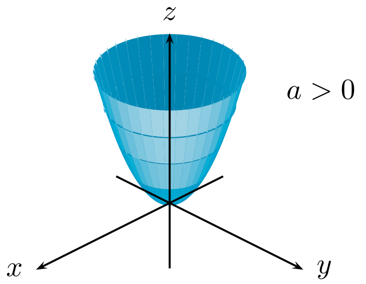
$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f : \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f \wedge f(x_1, \ldots, x_n) = h\} \subset \mathbb{R}^n.$$

1.1 Wykresy ważniejszych funkcji dwóch zmiennych $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

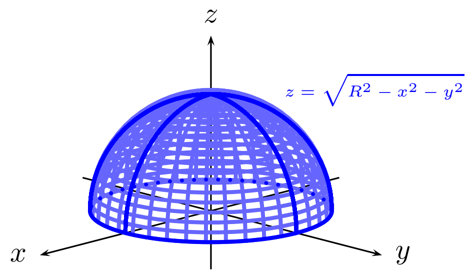
☞ Wykresem funkcji $z = Ax + By + C$ jest płaszczyzna o wektorze normalnym $\vec{n} = [-A, -B, 1]$, przechodząca przez punkt $(0, 0, C)$.

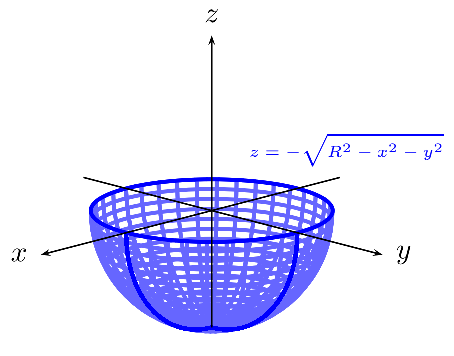


☞ Wykresem funkcji $z = a(x^2 + y^2)$ jest paraboloida obrotowa, t.j. powierzchnia obrotowa powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$ (lub $z = ay^2$) wokół osi Oz.

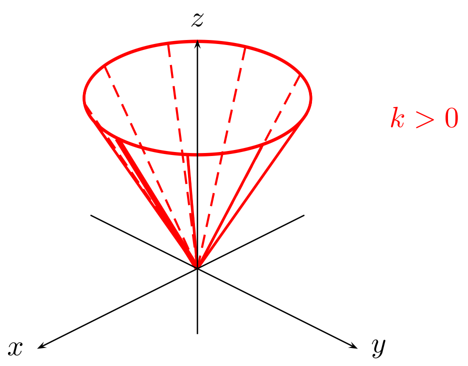


☞ Wykresem funkcji $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ jest górna lub dolna półsfera o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R.

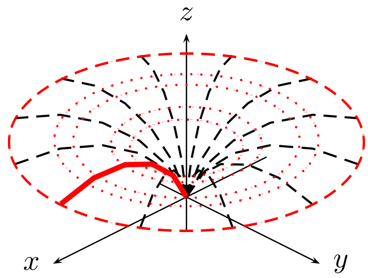




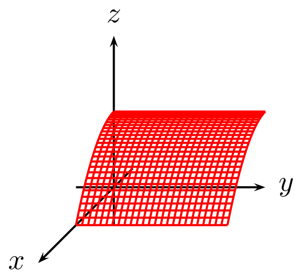
☞ Wykresem funkcji $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ jest stożek, t.j. powierzchnia powstała z obrotu półprostej $z = kx$, $y = 0$, dla $x \geqslant 0$ wokół osi Oz.

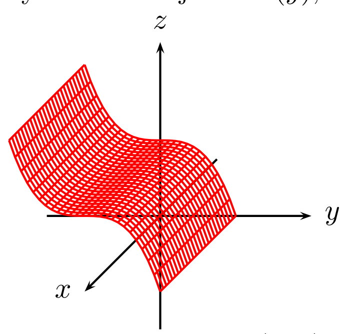


☞ Wykresem funkcji $z = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ jest powierzchnia obrotowa powstała z obrotu wykresu funkcji $z = h(x)$, $y = 0$, dla $x \geqslant 0$ wokół osi Oz.

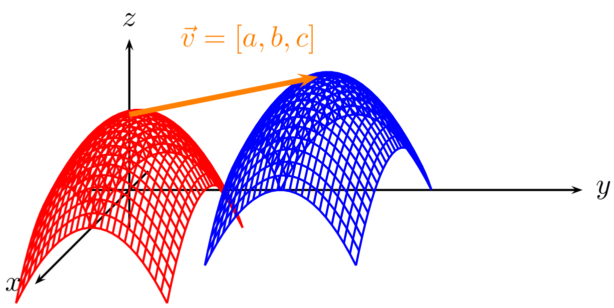


☞ Wykresem funkcji $z = g(x)$ lub $z = k(y)$ jest powierzchnia walcowa powstała z przesunięcia wykresu funkcji $z = g(x)$, dla $y = 0$ równolegle do osi OY lub wykresu funkcji $z = k(y)$, dla $x = 0$ równolegle do osi OX.

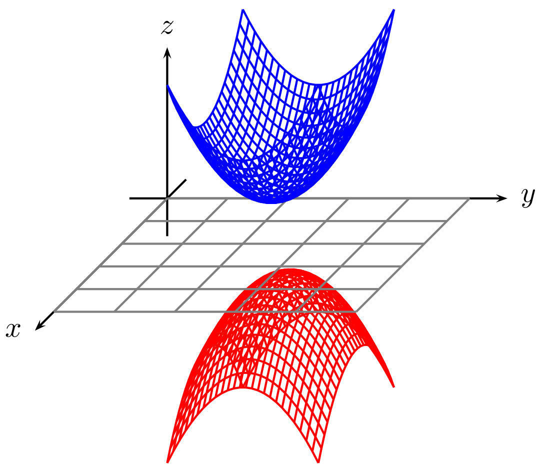




☞ Wykres funkcji $z = f(x-a, y-b) + c$ powstaje z wykresu funkcji $z = f(x, y)$ przez przesunięcie o wektor $\vec{v} = [a, b, c]$.



☞ Wykres funkcji $z = -f(x, y)$ powstaje z wykresu funkcji $z = f(x, y)$ przez symetryczne odbicie względem płaszczyzny OXY.



2 Powierzchnie obrotowe(*)

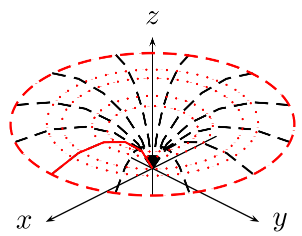
Krzywa obracająca się dookoła prostej zatacza powierzchnię obrotową. Obróćmy krzywą o równaniu

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in \langle a, b \rangle$$

dookoła osi OZ. Wówczas punkt $P(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ krzywej zatoczy okrąg o równaniu

$(\star)$ $$x^2 + y^2 = [x(t_0)]^2 + [y(t_0)]^2 \text{ leżący na płaszczyźnie } z = z(t_0).$$

Po eliminacji t_0 z $(\star)$ otrzymujemy równanie powierzchni obrotowej zataczane j przez krzywą.



Przykład 2.1 (Przykłady powierzchni obrotowych)**.** Niech linia prosta

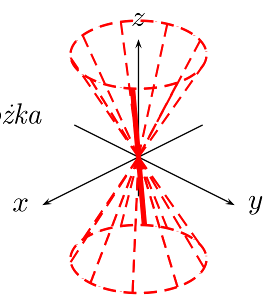
$$x = t, \quad y = t, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

obraca się dookoła osi OZ. Wówczas punkt $P(t_0, t_0, 2t_0)$ prostej zatoczy okrąg o równaniu

$(\star\star)$ $$x^2 + y^2 = 2(t_0)^2 \text{ leżący na płaszczyźnie } z = 2t_0.$$

Po eliminacji t_0 z $(\star\star)$ otrzymujemy równanie powierzchni obrotowej zataczanej przez daną prostą.

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{2}$$ <– *równanie stożka*



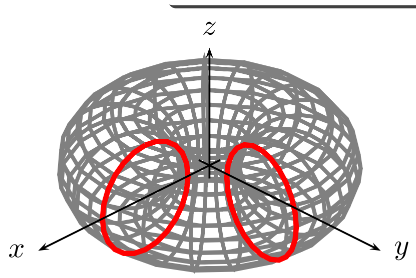
Niech okrąg

$$x = a + r\cos t, \quad y = 0, \quad z = r\sin t, \quad t \in \mathbb{R}$$

obraca się dookoła osi OZ. Wówczas punkt $P(a + r\cos t_0, 0, r\sin t_0)$ prostej zatoczy okrąg o równaniu

$(\diamondsuit)$ $$x^2 + y^2 = (a + r\cos t_0)^2.$$

Po eliminacji t_0 z $(\diamondsuit)$ otrzymujemy równanie $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$ <– *równanie torusa*; powierzchni obrotowej zataczanej przez okrąg $x = a + r\cos t, \quad y = 0, \quad z = r\sin t, \quad t \in \mathbb{R}$.



3 Granice funkcji wielu zmiennych

Niech $(P_k(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))_{k_i \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem punktów w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 3.1. Mówimy, że ciąg (P_k) dąży do punktu $P_0(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, jeżeli

$$\lim_{k_i \to +\infty} x_{k_i} = x_{0i}, \text{ dla każdego } i = 1, 2, \dots, n$$

oznacza to zbieżność dla każdej współrzędnej.

Przykład 3.2. Niech $P_n(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$ – ciąg punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.
Wówczas

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (0, 0).$$

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-zmiennych.
Niech $P_0(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na

$$S(P_0) \overset{\text{def}}{=} \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2} < r\right\} \setminus \{P_0\}$$

gdzie $r > 0$ jest pewną liczbą.

$$\lim_{P \to P_0} f(x_1, \dots, x_n) = g$$

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\forall_{\substack{(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) \\ x_{k_i} \neq x_{0i} \\ i = 1, 2, \dots, n}} \left[\lim_{k_i \to \infty} x_{k_i} = x_{0i}, \ i = 1, \dots, n \ \Rightarrow \ \lim_{k_i \to \infty} f(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) = g\right].$$

3.1 Własności granic funkcji wielu zmiennych

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie $P_0 \in \mathbb{R}^n$, to*

☞ $$\lim_{P \to P_0} [f(P) \pm g(P)] = \lim_{P \to P_0} f(P) \pm \lim_{P \to P_0} g(P).$$

☞ $$\lim_{P \to P_0} c \cdot f(P) = c \cdot \lim_{P \to P_0} f(P)$$

☞ $$\lim_{P \to P_0} [f(P) \cdot g(P)] = \lim_{P \to P_0} f(P) \cdot \lim_{P \to P_0} g(P)$$

☞ $$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim_{P \to P_0} f(P)}{\lim_{P \to P_0} g(P)}, \text{ o ile } \lim_{P \to P_0} g(P) \neq 0.$$

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli funkcje φ_i, $i = 1, \dots, n$ i f spełniają warunki:*

☞ $$\lim_{\mathfrak{T} \to \mathfrak{T}_0} \varphi_i(\mathfrak{T}) = x_{0i}, \quad \mathfrak{T} \in \mathbb{R}^m$$

☞ $$\forall \mathfrak{T} \in S(\mathfrak{T}_0) \quad (\varphi_1(\mathfrak{T}), \dots, \varphi_n(\mathfrak{T})) \neq (x_{01}, \dots, x_{0n})$$

☞ $$\lim_{P \to P_0} f(P) = g,$$

to $$\lim_{\mathfrak{T} \to \mathfrak{T}_0} f(\varphi_1(\mathfrak{T}), \dots, \varphi_n(\mathfrak{T})) = g.$$

4 Ciągłość funkcji wielu zmiennych

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-zmiennych.

$$\boxed{\text{Funkcja jest ciągła w punkcie } P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})}$$
$$\Updownarrow \text{def}$$
$$\boxed{\lim_{P \to P_0} f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{01}, \ldots, x_{0n})}.$$

Twierdzenie 4.1.

☞ *Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$, to w tym punkcie ciągłe są także funkcje*

$$\boxed{f + g, \quad f - g, \quad c \cdot f,\ c \in \mathbb{R}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g},\ \text{o ile } g(P_0) \neq 0}.$$

☞ *Jeżeli funkcje φ_i, $i = 1, \ldots, n$ są ciągłe w punkcie $\mathfrak{T}_0 \in \mathbb{R}^m$ oraz f jest ciągła w punkcie $P_0 = (\varphi_1(\mathfrak{T}_0), \ldots, \varphi_n(\mathfrak{T}_0))$, to funkcja*

$$\boxed{f\left(\varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_m)\right)}$$

jest ciągła w $\mathfrak{T}_0$.

5 Pochodne cząstkowe

Niech f oznacza funkcję n-zmiennych określoną w otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$.
Symbolem Δx_i oznaczamy przyrost zmiennej niezależnej x_i, $1 \leqslant n \leqslant n$, różny od zera i taki, żeby punkt $P(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, x_{0i} + \Delta x_i, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$ należał do otoczenia $\mathcal{O}$.
Granicę właściwą

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta x_i}$$

nazywamy pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji f względem zmiennej x_i w punkcie P_0 i oznaczamy symbolem $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$.

5.1 Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych

Dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ definicje pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego względem zmiennych x i y w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ są następujące

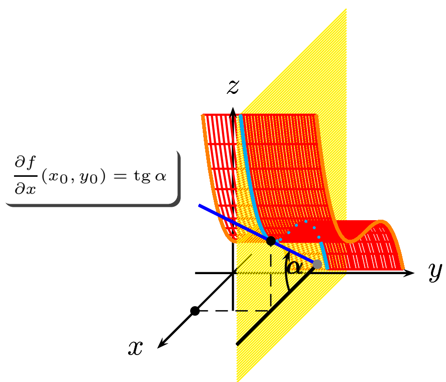
$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

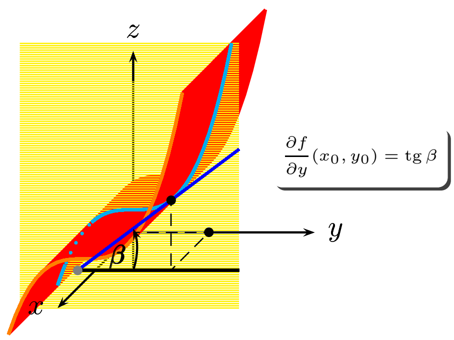
oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

5.2 Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych dla funkcji dwóch zmiennych

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad z = f(x, y)$. Załóżmy, że f ma pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w punkcie $P_0(x_0, y_0)$.





$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ jest miarą lokalnej szybkości wzrostu wartości funkcji f względem zmiennej x przy ustalonej wartości zmiennej y.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ jest miarą lokalnej szybkości wzrostu wartości funkcji f względem zmiennej y przy ustalonej wartości zmiennej x.

Uwaga 1. ***Nie ma związku między ciągłością funkcji wielu zmiennych a istnieniem pochodnych cząstkowych.***

Przykład 5.1 (Przykład funkcji nieciągłej i mającej pochodne cząstkowe)**.** Funkcja wielu zmiennych może mieć w punkcie obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i może nie być ciągła w tym punkcie, np. funkcja $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{dla } xy = 0 \\ 0, & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$ nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, ale f ma pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-1}{\Delta x} = 0$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1-1}{\Delta y} = 0.$$

Przykład 5.2 (Przykład funkcji ciągłej nie mającej pochodnych cząstkowych)**.** Niech $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,0)$, gdyż $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$, ale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \text{ — nie istnieje}$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} \text{ — nie istnieje.}$$

Jeżeli funkcja ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$, to funkcje

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\ldots,x_n),\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

gdzie $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathscr{D}$, nazywamy ***pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji f na zbiorze $\mathscr{D}$*** i ozn.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad \text{lub} \quad f'_{x_1},\ f'_{x_2},\ \ldots,\ f'_{x_n}.$$

Przykład 5.3. ☞ Niech $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(x+y)}$.

☞ Niech $g(x,y,z) = \sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg}(x + \mathrm{e}^{yz})}$.

6 Pochodna kierunkowa funkcji $f : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Niech f oznacza funkcję n-zmiennych określoną w otoczeniu $\mathscr{O}$ punktu $P_0(x_{01},\ldots,x_{0n}) \in \mathscr{D}$.
Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie P_0 w kierunku wersora $\vec{v} = [v_{x_1}, v_{x_2}, \ldots, v_{x_n}]$ określamy wzorem

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_{01}+tv_{x_1},\ldots,x_{0n}+tv_{x_n}) - f(x_{01},\ldots,x_{0n})}{t}}$$

Pochodna kierunkowa $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}$ funkcji f w kierunku $\vec{v}$ jest też oznaczana następująco $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ lub $f'_{\vec{v}}$.

☞ Dla $f : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{i}} = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{j}} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

☞ Dla $f : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{i}} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{j}} = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{k}} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Przykład 6.1. Niech $f(x,y,z) = x^2 - 2yz$, $P_0(1,0,-1)$ i $\vec{v} = \left[\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right]$. Wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\left(1+\frac{1}{3}t\right)^2 - 2\left(0-\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{3}t\right) - 1}{t} =$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{1+\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}t + \frac{2}{9}\sqrt{15}t^2 - 1}{t} = \frac{2}{3}\left(1-\sqrt{3}\right)$$

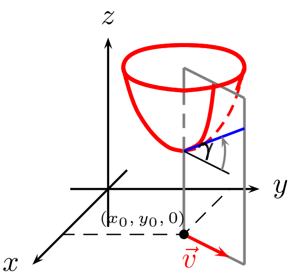
Przykład 6.2. Niech $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x+y+z}$, $P_0(0,0,0)$ i $\vec{v} = [1,1,1]$. Wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{3}t} - 1}{t} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\sqrt{3}t}}{1} = \sqrt{3}$$

6.1 Interpretacja geometryczna pochodnej kierunkowej funkcji dwóch zmiennych

Niech funkcja f będzie określona na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Ponadto niech γ oznacza kąt nachylenia do płaszczyzny XOY półstycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f półpłaszczyzną przechodzącą przez prostą $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 \end{cases}$ oraz równoległą do wersora $\vec{v}$. Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\gamma$$



Pochodna kierunkowa określa szybkość zmiany wartości funkcji f w kierunku $\vec{v}$.

7 Gradient funkcji

Niech $f : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Gradientem funkcji f w punkcie $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ nazywamy wektor określony wzorem

$$\nabla f(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right].$$

Gradient w punkcie P_0 jest również oznaczany przez $\operatorname{grad} f(P_0)$ lub $f'(P_0)$, tak jak pochodna jednej zmiennej.

Przykład 7.1. Niech $f(x,y) = x^3y^2 + 3x - y$ i $P_0(-2,1)$. Wówczas

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = [3x^2y^2 + 3, 2x^3y - 1], \quad \text{więc } \nabla f(-2,1) = [15, -17]$$

7.1 Pochodna kierunkowa a gradient funkcji

Twierdzenie 7.2 (wzór do obliczania pochodnej kierunkowej). *Niech pochodne cząstkowe* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ *będą ciągłe w punkcie* $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ *oraz niech* $\vec{v}$ *będzie dowolnym wersorem. Wtedy*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0) \circ \vec{v}.$$

Przykład 7.3. Niech $f(x,y) = x^3y^2 + 3x - y$, $P_0(-2,1)$ i $\vec{v} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Wówczas

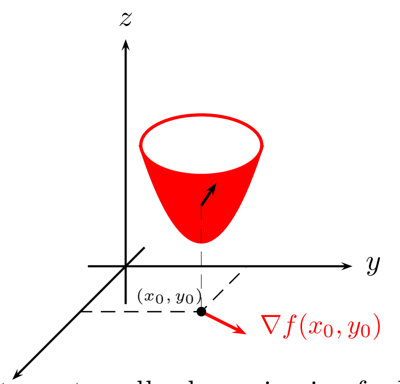
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}(-2,1) = \nabla f(-2,1) \circ \vec{v} = [15,-17] \circ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{32}{\sqrt{2}}.$$

Pochodna kierunkowa funkcji w punkcie liczona w kierunku gradientu ma wartość największą spośród wszystkich pochodnych kierunkowych liczonych w różnych kierunkach i

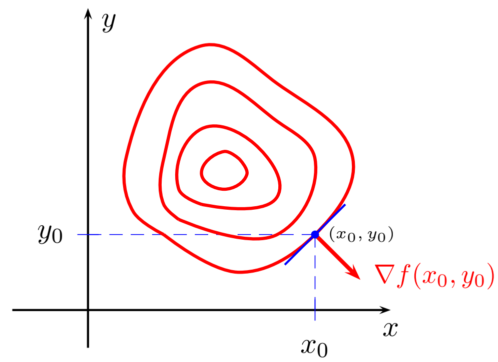
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,\nabla f(P_0)}(P_0) = \|\nabla f(P_0)\|.$$

7.2 Interpretacja geometryczna gradientu funkcji dwóch zmiennych

☞ Gradient funkcji w punkcie wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie.



☞ Gradient funkcji w punkcie jest prostopadły do poziomicy funkcji przechodzącej przez ten punkt.



8 Pochodne cząstkowe drugiego rzędu

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, na obszarze $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ oraz niech $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in \mathscr{D}$. ***Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji*** f ***w punkcie*** P_0 określamy wzorami:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(P_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)(P_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right)(P_0)$$

dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Powyższe pochodne oznaczamy także odpowiednio przez $f''_{x_i x_i}(P_0)$, $f''_{x_j x_i}(P_0)$ lub $f_{x_i x_i}(P_0)$, $f_{x_j x_i}(P_0)$.
Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w każdym punkcie obszaru $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$, to funkcje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

gdzie $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}$, nazywamy ***pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji f na obszarze D*** i oznaczamy odpowiednio przez $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ lub $f''_{x_i x_i}$, $f''_{x_j x_i}$.

9 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu $k \geqslant 2$ przynajmniej na otoczeniu punktu $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$, to

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_i \partial x_j^s \partial x_\ell^p}(P_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_j^s \partial x_\ell^p}\right)\right)(P_0),$$

gdzie $s + p = k$.

Twierdzenie 9.1 (Twierdzenie Schwarza). *Niech funkcja f będzie określona na otoczeniu punktu $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Ponadto niech*

- ☞ *pochodne cząstkowe* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *istnieją na otoczeniu punktu* P_0
- ☞ *pochodne cząstkowe* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, *będą ciągłe w punkcie* P_0.

Wtedy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0)$, $i \neq j$ *i* $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Uwaga 2. *Prawdziwe są analogiczne równości dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.*

10 Różniczkowalność funkcji n-zmiennych

Niech funkcja f będzie określona na otoczeniu punktu $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ oraz niech istnieją pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$, $i = 1, \ldots, n$. ***Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie*** P_0 wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\lim_{(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)} \frac{f(P) - f(P_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)\Delta x_1 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\Delta x_n}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}} = 0,$$

gdzie $P = (x_{01} + \Delta x_1, \ldots, x_{0n} + \Delta x_n)$.

Twierdzenie 10.1 (Warunek konieczny różniczkowalności funkcji). *Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.*

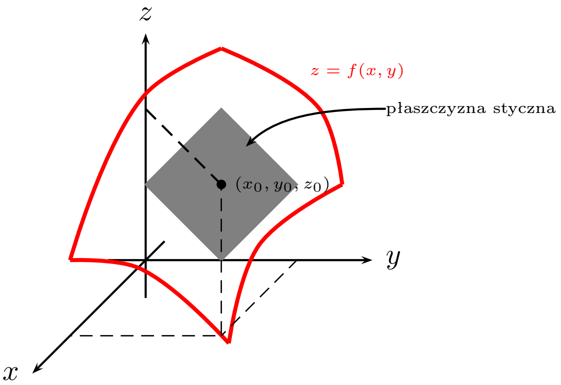
Uwaga 3. *Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Świadczy o tym przykład funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, która jest ciągła w punkcie $(0, 0)$, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna, gdyż nie istnieją pochodne cząstkowe tej funkcji, patrz Przykład 5.2.*

Twierdzenie 10.2 (Warunek wystarczający różniczkowalności funkcji)**.** *Niech funkcja f będzie określona na otoczeniu punktu $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Ponadto niech*

- ☞ *pochodne cząstkowe* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$, $i = 1, \ldots, n$ *istnieją na otoczeniu punktu* P_0
- ☞ *pochodne cząstkowe* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$, $i = 1, \ldots, n$ *będą ciągłe w punkcie* P_0.

Wtedy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$.

Różniczkowalność funkcji f w punkcie (x_0, y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna (niepionowa) do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji
Niech funkcja f będzie różniczkowalna w punkcie $P_0(x_0, y_0)$. Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$, ma postać:

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}.$$

11 Różniczka funkcji n-zmiennych

Niech funkcja f będzie określona na otoczeniu punktu $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Ponadto niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$.
***Różniczką funkcji f w punkcie** $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$* nazywamy funkcję zmiennych $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ określoną wzorem:

$$\boxed{\mathrm{d}f(P_0)(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\Delta x_i},$$

Różniczkę funkcji f oznacza się także przez $\mathrm{d}f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ lub krótko $\mathrm{d}f$.

11.1 Zastosowanie różniczki funkcji n-zmiennych

Niech funkcja f będzie różniczkowalna w punkcie $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Wtedy

$$\boxed{f(x_{01} + \Delta x_1, \ldots, x_{0n} + \Delta x_n) \approx f(P_0) + \mathrm{d}f(P_0)(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)},$$

przy czym błąd $\delta(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$ powyższego przybliżenia dąży szybciej do 0 niż $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$, tzn.

$$\lim_{(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)} \frac{\delta(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}} = 0.$$

Przykład 11.1. Wykorzystując różniczkę obliczymy wartość przybliżoną wyrażenia $\sqrt{2{,}1 \cdot 8{,}05}$.
Definiujemy funkcję $f(x,y) = \sqrt{xy}$. Przyjmujemy $x_0 = 2 \wedge y_0 = 8 \Rightarrow \Delta x = 0{,}1$ i $\Delta y = 0{,}05$.
Ponieważ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, więc

$$\sqrt{2,1 \cdot 8,05} \approx \sqrt{2 \cdot 8} + 1 \cdot 0{,}1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}05 = 4{,}1125.$$

11.2 Zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędów pomiarów

Niech wielkości fizyczne x_1, x_2, ..., x_n, y będą związane zależnością $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ponadto niech Δ_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$ oznaczają odpowiednio błędy bezwzględne pomiaru wielkości x_1, x_2, ..., x_n. Wtedy błąd bezwzględny Δ_y obliczeń wielkości y wyraża się wzorem przybliżonym

$$\Delta_y \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

Przykład 11.2. Przy pomocy menzurki można zmierzyć objętość ciała z dokładnością $\Delta_V = 0{,}1\ \text{cm}^3$, a przy pomocy wagi sprężynowej można ustalić jego masę z dokładnością 1 g. Objętość ciała zmierzona tym sposobem wynosi $V = 25\ \text{cm}^3$, a masa $M = 200$ g. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć gęstość ρ tego ciała?
Ponieważ $\rho(M,V) = \dfrac{M}{V}$, więc $\dfrac{\partial \rho}{\partial M} = \dfrac{1}{V}$ i $\dfrac{\partial \rho}{\partial V} = -\dfrac{M}{V^2}$, więc

$$\Delta_\rho \approx \left| \frac{\partial \rho}{\partial M} \right| \Delta_M + \left| \frac{\partial \rho}{\partial V} \right| \Delta_V = \frac{1}{25} \cdot 1 + \left| -\frac{200}{25^2} \right| \cdot 0{,}1 = 0{,}072.$$

11.3 Różniczka zupełna

Niech funkcja f będzie określona na otoczeniu punktu $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Ponadto niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$.
Przyrosty Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n nazywamy ***różniczkami zmiennych niezależnych*** x_1, x_2, ..., x_n, odpowiednio i oznaczamy symbolami $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, ..., $\mathrm{d}x_n$.
Różniczką zupełną funkcji f w punkcie $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ nazywamy wyrażenie:

$$\mathrm{d}f(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\mathrm{d}x_i.$$

12 Różniczkowalność odwzorowania $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Niech $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwartym niepustym podzbiorem, $P_0 \in \mathscr{D}$ oraz $f=(f_1,\dots,f_m):\mathscr{D}\to\mathbb{R}^m$.

Odwzorowanie $f=(f_1,\dots,f_n):\mathscr{D}\to\mathbb{R}^m$ nazywamy ***różniczkowalnym w punkcie P_0***, gdy istnieje macierz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

taka że

$$f(P)-f(P_0)=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}+\|\Delta x\|\cdot\varepsilon(P_0,\Delta x_1,\dots,\Delta x_n),$$

gdzie $\|\Delta x\|=\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}$, $P=(x_{01}+\Delta x_1,\dots,x_{0n}+\Delta x_n)\in\mathscr{D}$, $P_0=(x_{01},\dots,x_{0n})\in\mathscr{D}$ i $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(P_0,\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)=0$.

12.1 Pochodna odwzorowania $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

Macierz

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

taką że $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\|f(P)-f(P_0)-A\cdot\Delta x\|}{\|\Delta x\|}=0$, gdzie $\|\Delta x\|=\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}$, $\Delta x=\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$,
$P=(x_{01}+\Delta x_1,\dots,x_{0n}+\Delta x_n)\in\mathscr{D}$, $P_0=(x_{01},\dots,x_{0n})\in\mathscr{D}$, nazywamy

macierzą Jacobiego (***pochodną***) ***odwzorowania f w punkcie P_0***

i oznaczamy $Df(x_0)$ albo $\dfrac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ lub $\dfrac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_1,\dots,x_n)}$.

$$\mathrm{d}f(P_0,\Delta x)=A\cdot\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}=Df(P_0)\cdot\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

nazywamy ***różniczką odwzorowania f w punkcie P_0 dla przyrostu Δx***.

Twierdzenie 12.1. *Odwzorowanie f różniczkowalne w punkcie P_0 ma tylko jedną macierz Jacobiego.*

Twierdzenie 12.2. *Odwzorowanie f różniczkowalne w punkcie P_0 jest ciągłe w tym punkcie.*

Twierdzenie 12.3. *Niech $\mathscr{D}\subseteq\mathbb{R}^n$ będzie otwartym niepustym podzbiorem, $P_0\in\mathscr{D}$ oraz $f=(f_1,\dots,f_m):\mathscr{D}\to\mathbb{R}^m$ będzie różniczkowalne w P_0.*
Wtedy funkcje $f_i:\mathscr{D}\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$ mają pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(P_0)$, $i=1,\dots,m$, $k=1,\dots,n$ oraz macierz

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{bmatrix},$$

jest macierzą Jacobiego (pochodną) odwzorowania f w punkcie P_0.

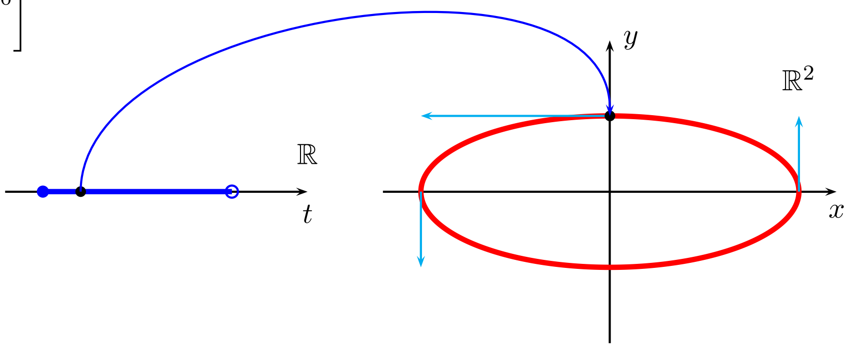
Jeżeli $m = n$, to

$$\underbrace{\det Df = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}}$$

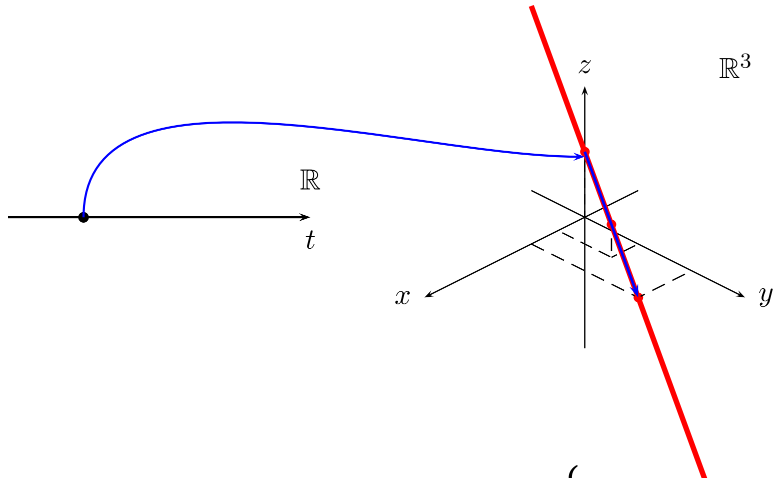
nazywamy ***jakobianem odwzorowania** f* i ozn. $\mathcal{J}$.

12.2 Przykłady odwzorowań i ich pochodne

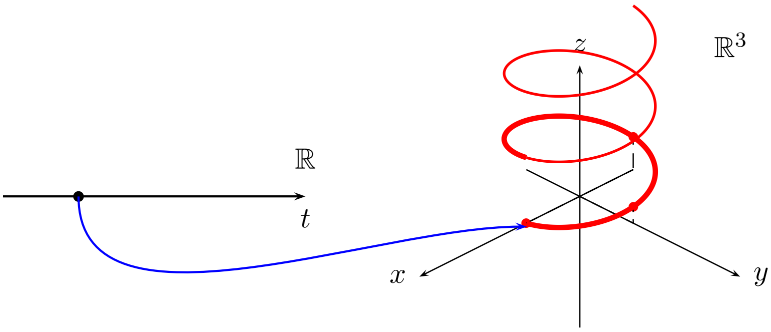
Przykład 12.4. Niech $f : \langle 0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ i $f(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$. Wtedy $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in \langle 0, 2\pi) \Rightarrow$ $Df(t_0) = \begin{bmatrix} -a\sin t_0 \\ b\cos t_0 \end{bmatrix}$



Przykład 12.5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ i $f(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+2t \\ -t \end{pmatrix}$. Wtedy $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow Df(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$



Przykład 12.6. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ i $f(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$. Wtedy $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow Df(t_0) =$ $\begin{bmatrix} -a\sin t_0 \\ a\cos t_0 \\ b \end{bmatrix}$



Przykład 12.7. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i $f(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} x_0 + u_1 t_1 + v_1 t_2 \\ y_0 + u_2 t_1 + v_2 t_2 \\ z_0 + u_3 t_1 + v_3 t_2 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t_1 + v_1 t_2 \\ y = y_0 + u_2 t_1 + v_2 t_2 \\ z = z_0 + u_3 t_1 + v_3 t_2 \end{cases}, (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow Df(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix}$$

Przykład 12.8. Niech $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}^2$, $\mathscr{D} = \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ i $f(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho \cos\varphi \\ \varrho \sin\varphi \end{pmatrix}$. Wtedy

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\varphi \\ y = \varrho \sin\varphi \end{cases}, (\varrho, \varphi) \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow Df(\varrho, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\varrho \sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho \sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho \cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho$$

Przykład 12.9. Niech $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}^2$, $\mathscr{D} = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ i $f(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} a\varrho \cos\varphi \\ b\varrho \sin\varphi \end{pmatrix}$. Wtedy

$$\begin{cases} x = a\varrho \cos\varphi \\ y = b\varrho \sin\varphi \end{cases}, (\varrho, \varphi) \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$

$$Df(\varrho,\varphi)=\begin{bmatrix} a\cos\varphi & -a\varrho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\varrho\cos\varphi \end{bmatrix} \wedge \mathcal{J}=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\varrho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\varrho\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\varrho$$

Przykład 12.10. Niech $f:\mathscr{D}\to\mathbb{R}^3$, $\mathscr{D}=\langle 0,+\infty)\times\langle 0,2\pi)\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^3$ i $f(\varrho,\varphi,t)=\begin{pmatrix}\varrho\cos\varphi\\ \varrho\sin\varphi\\ t\end{pmatrix}$. Wtedy

$$\begin{cases} x=\varrho\cos\varphi \\ y=\varrho\sin\varphi \\ z=t \end{cases},(\varrho,\varphi)\in\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^3\Rightarrow$$

$$Df(\varrho,\varphi,t)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\wedge\mathcal{J}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\varrho$$

Przykład 12.11. Niech $f:\mathscr{D}\to\mathbb{R}^3$, $\mathscr{D}=\langle 0,+\infty)\times\langle 0,2\pi)\times\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle\subset\mathbb{R}^3$ i $f(\varrho,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix}\varrho\cos\varphi\cos\psi\\ \varrho\sin\varphi\cos\psi\\ \varrho\sin\psi\end{pmatrix}$.

Wtedy

$$\begin{cases} x=\varrho\cos\varphi\cos\psi \\ y=\varrho\sin\varphi\cos\psi \\ z=\varrho\sin\psi \end{cases},(\varrho,\varphi)\in\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^3\Rightarrow$$

$$Df(\varrho,\varphi,\psi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi & -\varrho\sin\varphi\cos\psi & -\varrho\cos\varphi\sin\psi\\ \sin\varphi\cos\psi & \varrho\cos\varphi\cos\psi & -\varrho\sin\varphi\sin\psi\\ \sin\psi & 0 & \varrho\cos\psi\end{bmatrix}\wedge\mathcal{J}=\varrho^2\cos\psi$$

13 Ekstrema funkcji wielu zmiennych$^{(*)}$

13.1 Ekstrema lokalne

Niech $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie funkcją n-zmiennych. Niech $\mathscr{U} \subset \mathcal{D}_f$ będzie zbiorem otwartym i $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \mathscr{U}$.

Definicja 13.1. Funkcja f ma w punkcie $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ ***minimum lokalne***, jeżeli istnieje otoczenie $\mathscr{U} \subset \mathcal{D}_f$ punktu $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$, takie że dla każdego punktu $P \in \mathscr{U}$ i $P \neq P_0$ spełniona jest nierówność

$$f(P) \geqslant f(P_0).$$

Funkcja f ma w punkcie P_0 ***minimum lokalne właściwe***, jeżeli istnieje otoczenie $\mathscr{U} \subset \mathcal{D}_f$ punktu P_0, takie że dla każdego punktu $P \in \mathscr{U}$ i $P \neq P_0$ spełniona jest nierówność

$$f(P) > f(P_0).$$

Definicja 13.2. Funkcja f ma w punkcie $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ ***maksimum lokalne***, jeżeli istnieje otoczenie $\mathscr{U} \subset \mathcal{D}_f$ punktu $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$, takie że dla każdego punktu $P \in \mathscr{U}$ i $P \neq P_0$ spełniona jest nierówność

$$f(P) \leqslant f(P_0).$$

Funkcja f ma w punkcie $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ ***maksimum lokalne właściwe***, jeżeli istnieje otoczenie $\mathscr{U} \subset \mathcal{D}_f$ punktu $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$, takie że dla każdego punktu $P \in \mathscr{U}$ i $P \neq P_0$ spełniona jest nierówność

$$f(P) < f(P_0).$$

Minima i maksima lokalne **nazywamy EKSTREMAMI LOKALNYMI.**

13.2 Ekstrema globalne

Definicja 13.3. Liczba m jest ***najmniejszą wartością funkcji f na zbiorze $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_f$***, jeżeli istnieje punkt $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \mathcal{A}$, taki że

$$f(P_0) = m$$

i dla każdego punktu $P \in \mathcal{A}$

$$f(P) \geqslant f(P_0) = m.$$

Liczbę m nazywamy ***minimum globalnym funkcji f na zbiorze $\mathcal{A}$***.

Definicja 13.4. Liczba M jest ***największą wartością funkcji f na zbiorze $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_f$***, jeżeli istnieje punkt $P_0(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \mathcal{A}$, taki że

$$f(P_0) = M$$

i dla każdego punktu $P \in \mathcal{A}$

$$f(P) \leqslant f(P_0) = M.$$

Liczbę M nazywamy ***maksimum globalnym funkcji f na zbiorze $\mathcal{A}$***.

Minimum i maksimum globalne **nazywamy EKSTREMAMI GLOBALNYMI.**

13.3 Warunki na istnienie ekstremów funkcji wielu zmiennych

Twierdzenie 13.5 (Warunek konieczny istnienia ekstremum). *Jeżeli*

☞ *f ma ekstremum w punkcie P_0,*

☞ *istnieją pochodne $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ cząstkowe w punkcie P_0,*

to

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) = 0}, \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0) = 0}, \ldots, \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\nabla f(P_0) = [0, 0, \ldots, 0] = \vec{0}}$$

Uwaga 4. *Z twierdzenia tego wynika, że funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach, w których wszystkie jej pochodne cząstkowe są równe* 0 *albo w punktach, w których przynajmniej jedna pochodna cząstkowa nie istnieje. Zerowanie się pochodnych cząstkowych nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego.*
Na przykład funkcje $\boxed{f(x, y) = x^3}$, $\boxed{f(x, y) = x^2 - y^2}$ *spełniają warunki* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0}$, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0}$ *i nie mają ekstremów w punkcie* $(0, 0)$.

Definicja 13.6. Punkt $P_0 \in \mathbb{R}^n$, w którym przynajmniej jedna pochodna cząstkowa nie istnieje lub w którym wszystkie pochodne cząstkowe są równe zero nazywamy ***punktem krytycznym funkcji f***
Punkt krytyczny P_0, w którym jest spełniony warunek

$$\boxed{\nabla f(P_0) = \vec{0}}$$

nazywamy ***punktem stacjonarnym funkcji f***.

Definicja 13.7. Macierz

$$\boxed{Hf := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}}$$

nazywamy ***HESJANEM*** funkcji f.

Hesjan jest macierzą zależną od tych samych zmiennych, od których zależy funkcja.

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz zdefiniujmy funkcje

$$\boxed{\Delta_i := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}},$$

$i = 1, \ldots, n$.

Zauważmy, że $\boxed{\Delta_1 := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}}$ i $\boxed{\Delta_n = \det Hf}$.

Twierdzenie 13.8 (Warunek wystarczający istnienia ekstremum)**.**
Załóżmy, że $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(P_0) = 0$, $\ldots$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) = 0$ *(punkt P_0 jest punktem stacjonarnym funkcji f).*
Jeżeli

- ☞ $\Delta_i(P_0) > 0$, *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$, *to w punkcie* P_0 *funkcja* f *ma minimum lokalne właściwe.*
- ☞ $\Delta_1(P_0) < 0$, $\Delta_2(P_0) > 0$, $\Delta_3(P_0) < 0$, $\ldots$, $(-1)^i \Delta_i(P_0) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *to w punkcie* P_0 *funkcja* f *ma maksimum lokalne właściwe.*

Uwaga 5. *Niech P_0 będzie punktem krytycznym funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.*
Jeżeli

$$\Delta_2(P_0) < 0,$$

to w punkcie P_0 funkcja f ***nie ma*** *ekstremum.*
Np. dla $f(x, y) = x^2 - y^2$ *mamy* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ *i*

$$\Delta_2 = \det Hf = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

więc funkcja f nie ma ekstremum w punkcie krytycznym $(0, 0)$.

Przykład 13.9. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z.$$

Wtedy $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2$. Ponieważ

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -1 \end{cases},$$

więc $P_0\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ jest punktem krytycznym funkcji f.
Ponadto

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i

$$\Delta_1(P_0) = 2 > 0, \quad \Delta_2(P_0) = 3 > 0, \quad \Delta_3(P_0) = 6 > 0,$$

więc funkcja f ma w punkcie $P_0\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ minimum lokalne, które wynosi $f_{\min} = f(P_0) = -\frac{4}{3}$.

Przykład 13.10. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$ i

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2.$$

Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -2x_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

Ponieważ

$$\begin{cases} -2x_1 = 0 \\ \vdots \\ -2x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases},$$

więc $P_0\,(0, \ldots, 0)$ jest punktem krytycznym.
Ponadto

$$Hf = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 2 \end{bmatrix}$$

i

$$\Delta_1(P_0) = -2 < 0, \; \Delta_2(P_0) = 4 > 0, \; \ldots, \; \Delta_n(P_0) = (-2)^n,$$

$$\Updownarrow$$

$$(-1)^i \Delta_i(P_0) = (-1)^i (-2)^i = 2^i > 0,$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
Zatem funkcja f ma w punkcie $P_0\,(0, \ldots, 0)$ maksimum lokalne, które wynosi $f_{\max} = f(P_0) = 0$.

Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest domknięty i ograniczony, a f jest funkcją ciągłą, to funkcja f osiąga w zbiorze $\mathcal{A}$ wartość najmniejszą i największą.

13.3.1 Algorytm znajdowania ekstremów globalnych funkcji na obszarze domkniętym

☞ Znajdujemy wszystkie punkty krytyczne wewnątrz zbioru $\mathcal{A}$ i obliczmy wartości funkcji w tych punktach.

☞ Znajdujemy punkty krytyczne na brzegu obszaru $\mathcal{A}$ i obliczmy wartości funkcji w tych punktach.

☞ Porównujemy otrzymane wartości funkcji znajdując wartość najmniejszą i największą.

Przykład 13.11. Niech $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest trójkątem ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 4$.