PRZYKŁAD 4.7.

$$x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} - 2xy u_{xy} + x u_x + y u_y = 0. \qquad (4.21)$$

Najpierw typ: $\Delta(x,y) = -(x^2 y^2 - x^2 y^2) = 0$ na całej płaszczyźnie = równanie paraboliczne na całej płaszczyźnie (uwaga: $a_{12}(x,y) = xy$) . tworzymy równanie charakterystyk (przypomnę: zmieni się znak przy $a_{12}(x,y)$):

Równanie charakterystyk ma postać

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 = 0,$$

czyli

$$\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0.$$

Rozwiązując równanie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

otrzymamy

$$yx = C.$$

Po zmianie zmiennych

$$\xi = xy, \qquad \eta = x$$

Jedna z nowych zmiennych = wyliczona całka pierwsza, druga zmienna jest pozostawiona bez zmian.

Tu dłuuu…….uugi etap wyliczania pochodnych cząstkowych do podstawienia, aby równanie zawierało pochodne cząstkowe w nowych zmiennych - np.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = y\ u_\xi + u_\eta$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = x\ u_\xi$$

itd.

równanie (4.21) przyjmie postać

$$w_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} w_\eta = 0.$$

(to po długich obliczeniach – na politechnikach preferowane są metody: gotowe wzory na pochodne – wyliczone na abstrakcyjnych funkcjach i podstawianie do nich!).

Powyższe równanie możemy obustronnie całkować względem zmiennej η:

otrzymamy

$$\frac{dv}{d\eta} + \frac{1}{\eta} v = 0.$$

Całka tego równania ma postać

$$v = \frac{C}{\eta}.$$

Ponieważ C może być funkcją η, przyjmując $C = F(\eta)$ otrzymamy

$$\frac{dw}{d\eta} = \frac{1}{\eta} F(\xi).$$

Stąd

$$w = F(\xi)\ln|\eta| + G(\xi),$$

a wracając do zmiennych wyjściowych otrzymamy

$$u(x,y) = F(xy)\ln|x| + G(xy).$$