charaktery grupy H_1 są postaci $h(x,y)$, $x = \text{const}$ (ponadto h musi spełniać pewne warunki mierzalności, których nie będziemy tu dokładnie formułować). Analogonami wzorów (2) i (4) są teraz wzory

$$F(y) = c\int_H f(x)\overline{h(x,y)}\,d\mu(x), \tag{11}$$

$$f(x) = c\int_{H_1} F(y)h(x,y)\,d\mu_1(y), \tag{12}$$

gdzie c jest odpowiednio dobranym czynnikiem normującym w rodzaju czynnika $1/\sqrt{2\pi}$ we wzorach (2) i (4). Z poprzednich rozważań wiemy już, że całki (11), (12) należy interpretować jako pewnego rodzaju całki niewłaściwe.

Główny problem brzmi teraz tak: dana jest funkcja f, wzór (11) definiuje jej transformatę F. Kiedy zachodzi wzór (12)?

Okazuje się, że przy pewnych założeniach o H i H_1 pewna część dotychczasowych rozważań uogólnia się, zwłaszcza przypadek funkcji o kwadracie całkowalnym. Dokładne omówienie tego rodzaju uogólnień należy do teorii grup topologicznych i wykracza poza ramy tej książki [1]). W następnym rozdziale zajmiemy się jedynie przypadkiem $H = H_1 = \mathcal{R}$ i $h(x,y) = e^{ixy}$ z miarą Lebesgue'a jako miarą niezmienniczą. Zwracamy uwagę czytelnika na pełną analogię wyników uzyskanych w rozdziale XV z wynikami uzyskanymi w niniejszym rozdziale.

ĆWICZENIE. Sprawdzić, że wzory (2), (4), (6)-(9) przyjmują następującą, prostszą postać, gdy miary l_1 i l_0 zastąpić wszędzie (również w definicji splotu) przez miary $\bar{l}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}l_1$ i $\bar{l}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}l_0$:

$$F(y) = \int_G f(x)e^{-ixy}d\bar{l}_1(x), \qquad f(x) = \int_C F(y)e^{ixy}d\bar{l}_0(y),$$

$$\|f\|_2 = \|F\|_2, \qquad (f,g) = (F,G),$$

$$T(f*g) = F\cdot G, \qquad T(fg) = F*G.$$

[1]) Por. np. Weil [1], Loomis [1].

ROZDZIAŁ XV

CAŁKI FOURIERA

§ 1. Transformaty Fouriera. W rozdziale niniejszym wszystkie funkcje określone są na prostej $\mathcal{R}$ lub półprostej $\overline{0;\infty}$. Przez miarę i mierzalność rozumiemy zawsze miarę Lebesgue'a l_1 i mierzalność względem tej miary, o ile inne założenia nie zostały wyraźnie wypowiedziane.

Transformatą Fouriera funkcji zespolonej mierzalnej f, określonej na $\mathcal{R}$, nazywamy funkcję

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx. \tag{1}$$

Piszemy wówczas

$$F = T(f). \tag{2}$$

Sprzężoną transformatą Fouriera funkcji zespolonej mierzalnej F, określonej na $\mathcal{R}$, nazywamy funkcję

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{ixy}dy. \tag{3}$$

Piszemy wówczas

$$f = T^*(F). \tag{4}$$

Przyjmując

$$g(x) = f(-x)$$

stwierdzamy, że

$$T^*(f) = T(g).$$

Zatem badanie transformat sprzężonych można zawsze sprowadzić do badania transformat (1).

Główny problemat, którym będziemy zajmować się w niniejszym rozdziale, polega na wyznaczeniu warunków na to, aby równość (2) implikowała równość (4), tzn. by zachodziła równość

$$f = T^*(T(f)). \tag{5}$$

Równość (5) wyraźnie napisana ma postać następującą:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iyt}dt\right)e^{ixy}dy\,, \tag{6}$$

inaczej

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i(x-t)y}dt\right)dy\,. \tag{7}$$

Rozdzielając całkę zewnętrzną na dwie całki $\int_{-\infty}^{0}$ i $\int_{0}^{\infty}$ i zastępując w pierwszej z nich y przez $-y$ możemy wzór (7) zapisać w postaci

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(x-t)y\,dt\right)dy\,. \tag{8}$$

Wyrażenia po prawej stronie równości (6), (7), (8) nazywamy *całkami podwójnymi Fouriera.*

Oznaczając

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos ty\,dt\,, \tag{9}$$

$$b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin ty\,dt \tag{10}$$

możemy podstawowy wzór (5) (tzn. (8)) zapisać również w postaci

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\big(a(y)\cos xy+b(y)\sin xy\big)\,dy\,. \tag{11}$$

Funkcja $a(y)$ jest parzysta, funkcja $b(y)$ jest nieparzysta, tzn.

$$a(-y)=a(y),\qquad b(-y)=-b(y)\,.$$

Z (1), (9) i (10) bezpośrednio wynika, że

$$F(y)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(a(y)-ib(y)\big)\,, \tag{12}$$

$$a(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(F(y)+F(-y)\big)\,,\qquad b(y)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\big(F(y)-F(-y)\big)\,. \tag{13}$$

Wzory (1) i (3) są odpowiednikami wzorów (2) i (4), § 10, rozdział XIV z teorii szeregów trygonometrycznych i — z dokładnością do czynnika — wzorów (15), (16), § 2, rozdział XIV. Wzory (9), (10), (11) są odpowiednikami wzorów (5), (6), (7), § 2, rozdział XIV. Wzory (12), (13) są (z dokładnością do czynnika) odpowiednikami wzorów (10) i (14), § 2, rozdział XIV.

O ile tylko zmiana porządku całkowania jest dopuszczalna, to

$$\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(x-t)y\,dt\right)dy=\lim_{\xi\to\infty}\int_{0}^{\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(x-t)y\,dt\right)dy= \tag{14}$$

$$=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\xi}f(t)\cos(x-t)y\,dy\right)dt=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\xi(x-t)}{x-t}dt\,.$$

Podstawową równość (5) można wówczas zapisać w postaci

$$f(x)=\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\xi(x-t)}{x-t}dt=\lim_{\xi\to\infty}\mathcal{D}_\xi * f(x), \tag{15}$$

gdzie

$$\mathcal{D}_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\xi x}{x}\,. \tag{16}$$

Wyrażenie

$$S_\xi(f;\,x)\doteq S_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\xi(x-t)}{x-t}dt=\mathcal{D}_\xi * f(x)= \tag{17}$$

$$=f*\mathcal{D}_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\frac{\sin\xi t}{t}dt$$

po prawej stronie równości (15) nosi nazwę *pojedynczej całki Fouriera.* Ponieważ dokonana przez nas zmiana porządku całkowania jest dopuszczalna jedynie przy pewnych dodatkowych założeniach, zagadnienia, czy funkcja f da się przedstawić (wszędzie, prawie wszędzie lub w danym punkcie x) za pomocą podwójnej całki Fouriera (8), czy pojedynczej całki Fouriera (15), są nierównoważne i muszą być traktowane oddzielnie, już chociażby z tej przyczyny, że warunki, zapewniające istnienie transformaty $T(f)$ i całki pojedynczej Fouriera $S_\xi(f;\,x)$, są różne [1]). Aby zapewnić istnienie transformaty $T(f)$ trzeba zakładać, że $f\in\widetilde{L}(\mathcal{R})$. Pojedyncza całka Fouriera jest określona dla szerszej klasy funkcji f. Mianowicie całka $S_\xi(f;\,x)$ istnieje już przy słabszym założeniu, że

$$\text{funkcja } \frac{f(t)}{1+|t|} \text{ należy do } \widetilde{L}(\mathcal{R})\,, \tag{18}$$

[1]) Teorii całek Fouriera poświęconych jest wiele obszernych dzieł specjalnych. Por. np. Bochner [1], Titchmarsh [2], Wiener [1]. Rozdział XV niniejszej książki zawiera jedynie kilka podstawowych twierdzeń teorii całek Fouriera.

tzn. że funkcja f jest całkowalna na każdym przedziale ograniczonym, a funkcja $f(t)/t$ — również na przedziałach nieograniczonych $a;\infty$ i $-\infty;-a$, gdzie $a>0$. Ponieważ funkcja $1/(1+|t|)$ należy do $\tilde{L}^q(\mathscr{R})$ dla $1<q\leqslant\infty$, więc z nierówności Höldera wynika, że założenie (18) jest spełnione, gdy $f\in\tilde{L}^p(\mathscr{R})$ przy pewnym p, $1\leqslant p<\infty$. Całka $S_\xi(f;x)$ jest więc określona dla $f\in\tilde{L}^p(\mathscr{R})$ $(1\leqslant p<\infty)$, przy tym jest funkcją ograniczoną i ciągłą zmiennej x na mocy twierdzenia 8.4 z rozdziału XII.

Zauważmy, że dla $f\in\tilde{L}(\mathscr{R})$ zmiana kolejności całkowania we wzorze (14) jest istotnie dopuszczalna na podstawie twierdzenia Fubiniego. Zatem

1.1. *Jeżeli* $f\in L(\mathscr{R})$ *i* $F=T(f)$, *to*

$$S_\xi(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\xi\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(x-t)y\,dt\Big)dy= \tag{19}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\xi}^{\xi}F(y)e^{ixy}dy=\frac{1}{\pi}\int_0^\xi\big(a(y)\cos xy+b(y)\sin xy\big)dy,$$

gdzie funkcje $a(y)$ *i* $b(y)$ *są zdefiniowane wzorami* (9), (10).

Funkcja $\mathscr{D}_\xi$ jest odpowiednikiem funkcji $\mathfrak{d}_n$ z teorii szeregów Fouriera (por. rozdział XIV, § 2, (18)), a całka $S_\xi(f;x)$ jest odpowiednikiem n-tej sumy częściowej $s_n(f;x)$ szeregu Fouriera.

W dotychczasowych rozważaniach i rachunkach (z wyjątkiem twierdzenia 1.1), przeprowadzanych zupełnie formalnie, nie troszczyliśmy się zupełnie o istnienie i sens całek $\int_{-\infty}^{\infty}$ i $\int_0^\infty$. Jak udowodnimy później (2.6), jeżeli $f\in\tilde{L}(\mathscr{R})$, to $F=T(f)$ jest funkcją ograniczoną i ciągłą, lecz niekoniecznie całkowalną (por. ćwiczenie 2). To samo dotyczy funkcji zmiennej y

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(x-t)y\,dt \tag{20}$$

(por. rozdział XII, 8.4). Całka właściwa $\int_0^\infty(\ )dy$ funkcji (20), występująca we wzorze (8), na ogół nie istnieje. W wielu przypadkach jednak całka ta istnieje, jeżeli interpretować ją jako całkę niewłaściwą w sensie zdefiniowanym w rozdziale VII, § 8, tzn. jako granicę $\int_0^\infty=\lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi$. Ponieważ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\xi}^{\xi}F(y)e^{ixy}dy=\frac{1}{\pi}\int_0^\xi\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(x-t)y\,dt\Big)dy,$$

więc całki $\int_{-\infty}^{\infty}(\ )dy$ we wzorach (3), (6), (7) powinniśmy w tym przypadku interpretować jako granicę $\int_{-\infty}^{\infty}=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}$. Tego rodzaju interpretacja jest zresztą analogonem postępowania przyjętego w teorii szeregów Fouriera, gdzie interesowała nas jedynie zbieżność zwykła (a nie bezwzględna, będąca odpowiednikiem całki właściwej Lebesgue'a — por. rozdział VII, § 9) szeregu Fouriera, tzn. zbieżność ciągu sum częściowych $s_n(f;x)$.

Aby nie zwężać ogólności naszych rozważań, będziemy więc systematycznie dopuszczać dwa typy całek niewłaściwych:

A) całkę niewłaściwą typu $\int_0^\infty=\lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi$, tzn. całkę

$$\int_0^\infty g(t)\,dt=\lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi g(t)\,dt,$$

zdefiniowaną w rozdziale VII, § 8.

B) całkę niewłaściwą typu $\int_{-\infty}^{\infty}=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}$, tzn. całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,dt=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}g(t)\,dt.$$

Ostatni typ całki niewłaściwej jest ogólniejszy niż całka niewłaściwa zdefiniowana w rozdziale VII, § 8, gdyż istnienie całki właściwej lub niewłaściwej w sensie rozdziału VII, § 8, tzn. całki

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,dt=\lim_{\xi,\eta\to\infty}\int_{-\xi}^{\eta}g(t)\,dt,$$

pociąga za sobą istnienie granicy $\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}g(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,dt$, lecz niekoniecznie na odwrót.

Podobnie jak w rozdziale VII, § 8, będziemy mówić, że całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{\infty}g(t,x)\,dt$ typu $\int_{-\infty}^{\infty}=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}$ jest zbieżna jednostajnie w zbiorze X, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje liczba ξ_0 taka, że dla $\xi>\xi_0$ i dla każdego $x\in X$

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty}g(t,x)\,dt-\int_{-\xi}^{\xi}g(t,x)\,dt\Big|<\varepsilon.$$

W § 5 wygodnie nam będzie wprowadzić trzeci rodzaj całek niewłaściwych.

Występowanie całek niewłaściwych będziemy wyraźnie zaznaczać w sformułowaniach twierdzeń przez podanie ich typu.

ĆWICZENIA. **1.** Jeżeli funkcja f jest parzysta, to transformata Fouriera $F = T(f)$ jest funkcją parzystą i wyraża się wzorem

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos xy\,dx.$$

Ponadto $T^*(f) = T(f)$.

Jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to transformata Fouriera $F = T(f)$ jest funkcją nieparzystą i wyraża się wzorem

$$F(y) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin xy\,dx.$$

Ponadto $T^*(f) = -T(f)$.

Uwaga. We wzorach powyższych wystarczy właściwie ograniczyć się do rozpatrywania funkcji f i F na półprostej $0;\infty$ zamiast na całej prostej. Wskutek tego wprowadza się następujące definicje:

Transformatą cosinusową funkcji f, określonej w przedziale $0;\infty$, nazywamy funkcję $F = T_c(f)$, określoną dla $y > 0$ wzorem

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos xy\,dx,$$

a *transformatą sinusową* funkcji f, określonej w $0;\infty$, nazywamy funkcję $F = T_s(f)$, określoną dla $y > 0$ wzorem

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin xy\,dx.$$

Odpowiednikiem równości (5) dla transformat cosinusowej i sinusowej są wzory

$$(*)\qquad f = T_c(T_c(f)),\qquad f = T_s(T_s(f)).$$

Równości (*) mogą być uważane za szczególny przypadek równości (5), jeżeli funkcję f, zdefiniowaną na półprostej, rozszerzyć do funkcji parzystej lub nieparzystej określonej na całej prostej $\mathcal{R}$.

2. Transformatą cosinusową funkcji charakterystycznej przedziału $0;a$ jest funkcja $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin ax}{x}$, a transformatą sinusową jest funkcja $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos ax}{x}$.

Transformatą Fouriera funkcji charakterystycznej przedziału $-a;a$ jest funkcja $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin ax}{x}$.

3. Transformatą cosinusową funkcji e^{-x} jest funkcja $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+x^2}$, a transformatą sinusową – funkcja $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x}{1+x^2}$.

Transformatą Fouriera funkcji $e^{-|x|}$ jest funkcja $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

4. Transformatą cosinusową i transformatą Fouriera funkcji $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ jest funkcja $e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

§ 2. Transformaty Fouriera-Stieltjesa. Wyznaczanie funkcji przez jej transformatę. Niech $\varphi \in V(\mathcal{R})$ będzie funkcją określoną na $\mathcal{R}$ o wahaniu ograniczonym (tzn. $\Delta^*_\varphi(\mathcal{R}) < \infty$). *Transformatą Fouriera-Stieltjesa* funkcji φ nazywamy funkcję

$$(1)\qquad F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,d\varphi(x).$$

Całka po prawej stronie jest całką właściwą Lebesgue'a-Stieltjesa.

2.1. *Transformata Fouriera-Stieltjesa F funkcji $\varphi \in V(\mathcal{R})$ o wahaniu ograniczonym jest funkcją ciągłą ograniczoną:*

$$(2)\qquad |F(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Delta^*_\varphi(\mathcal{R})\qquad \textit{dla}\quad y\in\mathcal{R}.$$

Oszacowanie (2) wynika wprost z rozdziału XI, § 12, (3).

Jeżeli $y_n \to y$, to $e^{-ixy_n} \to e^{-ixy}$ dla każdego x. Stąd oraz z rozdziału XI, 8.1 (c), wynika, że $F(y_n) \to F(y)$, co dowodzi ciągłości funkcji F.

Z oszacowania (2) wynika, że operacja tworzenia transformaty jest operacją liniową, odwzorowującą $V(\mathcal{R})$ w $C(\mathcal{R})$. Wzór (1) jest analogonem wzoru (5) z § 4, rozdział XIV, a oszacowanie (2) — analogonem ostatniej z nierówności (8) w § 4, rozdział XIV.

2.2. *Jeżeli F jest transformatą Fouriera-Stieltjesa funkcji $\varphi \in V(\mathcal{R})$ o wahaniu skończonym, to dla każdej liczby $x \in \mathcal{R}$*

$$(3)\qquad \frac{\varphi(x+)+\varphi(x-)}{2} = \frac{\varphi(0+)+\varphi(0-)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iyx}-1}{iy}F(y)\,dy,$$

gdzie całka po prawej stronie (3) jest niewłaściwa typu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{\xi\to\infty}\int\limits_{-\xi}^{\xi}$.

Wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy φ jest funkcją niemalejącą ograniczoną (przypadek ogólny sprowadza się do tego przypadku przez przedstawienie funkcji φ jako różnicy swoich wahań nieoznaczonych, górnego i dolnego).

Mamy

$$\begin{aligned} S_\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\xi}^{\xi}\frac{e^{iyx}-1}{iy}F(y)\,dy = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\xi}^{\xi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iyx}-1}{iy}e^{-iyt}\,d\varphi(t)\Big)dy = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\xi}^{\xi}\frac{e^{iy(x-t)}-e^{-iyt}}{iy}\,dy\Big)d\varphi(t). \end{aligned}$$

Zmiana porządku całkowania jest dozwolona na podstawie twierdzenia Fubiniego, gdyż funkcja podcałkowa jest całkowalna względem miary produktowej $l_1 \times \mu_\varphi$, bowiem funkcja podcałkowa jest ograniczona a zbiory, po których całkujemy, mają miary skończone.

Przedstawiając całkę $\int\limits_{-\xi}^{\xi}$ jako sumę całek $\int\limits_{0}^{\xi} + \int\limits_{-\xi}^{0}$ i zastępując y przez $-y$ w drugiej całce, otrzymujemy

$$S_\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{\xi}\frac{\sin y(x-t)}{y}dy + \int\limits_{0}^{\xi}\frac{\sin yt}{y}dy\right)d\varphi(t) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-t,\xi)\,d\varphi(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t,\xi)\,d\varphi(t)\right),$$

gdzie

$$g(t,\xi) = \int\limits_{0}^{\xi}\frac{\sin yt}{y}dy = \int\limits_{0}^{t\xi}\frac{\sin y}{y}dy\,.$$

Funkcja $g(t,\xi)$ jest ograniczona dla $x \in \mathcal{R}$ i $\xi \geqslant 0$ oraz, jak wiadomo z analizy,

$$\lim_{\xi\to\infty} g(t,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi, & \text{gdy} \quad t > 0\,, \\ 0, & \text{gdy} \quad t = 0\,, \\ -\frac{1}{2}\pi, & \text{gdy} \quad t < 0\,. \end{cases}$$

Tym samym

$$\lim_{\xi\to\infty} g(x-t,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi, & \text{gdy} \quad x-t > 0\,, \\ 0, & \text{gdy} \quad x = t\,, \\ -\frac{1}{2}\pi, & \text{gdy} \quad x-t < 0\,. \end{cases}$$

Ponieważ całkowanie względem t odbywa się na zbiorze miary μ_φ skończonej, więc (por. rozdział XI, 8.1 (c))

$$\lim_{\xi\to\infty} S_\xi = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lim_{\xi\to\infty} g(x-t,\xi)\,d\varphi(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\lim_{\xi\to\infty} g(t,\xi)\,d\varphi(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\pi\big(\varphi(x-)-\varphi(-\infty)\big) - \frac{1}{2}\pi\big(\varphi(\infty)-\varphi(x+)\big) -$$

$$- \frac{1}{2}\pi\big(\varphi(0-)-\varphi(-\infty)\big) + \frac{1}{2}\pi\big(\varphi(\infty)-\varphi(0+)\big)\Big),$$

przedstawiając pierwszą z całek jako sumę całek rozciągniętych na zbiory $-\infty; x$, $[x]$, $x;\infty$, a drugą całkę — jako sumę całek rozciągniętych na zbiory $-\infty;0$, $[0]$, $0;\infty$. W rezultacie

$$\lim_{\xi\to\infty} S_\xi = \frac{\varphi(x-)+\varphi(x+)}{2} - \frac{\varphi(0+)+\varphi(0-)}{2},$$

c. b. d. o.

Równość (3) jest analogonem równości (9) z § 4, rozdział XIV. Orzeka ona, że (pomijając punkty nieciągłości) funkcja φ jest wyznaczona przez swoją transformatę Fouriera-Stieltjesa z dokładnością do stałej. Większej dokładności nie można oczekiwać, gdyż zmiana wartości funkcji φ w jednym punkcie lub dodanie stałej do funkcji φ nie zmienia jej transformaty Fouriera-Stieltjesa F.

W szczególności, jeżeli transformaty Fouriera-Stieltjesa funkcji $\varphi_1, \varphi_2 \in V_0(\mathcal{R})$ (por. rozdział XII, § 3 E) są równe, to $\varphi_1 = \varphi_2$. Zatem, każda funkcja $\varphi \in V_0(\mathcal{R})$ jest jednoznacznie wyznaczona przez swoją transformatę Fouriera-Stieltjesa.

Nazwijmy *transformatą Fouriera-Stieltjesa* skończonej przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru $\nu \in W(\mathfrak{B}_1)$ (por. rozdział XII, § 3 D), określonej na ciele $\mathfrak{B}_1$ podzbiorów borelowskich prostej $\mathcal{R}$, funkcję

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathcal{R}} e^{-ixy}\,d\nu(x)\,,$$

tzn. transformatę Fouriera-Stieltjesa jej dystrybuanty. Widzimy więc, że funkcja zbioru $\nu \in W(\mathfrak{B}_1)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez swoją transformatę Fouriera-Stieltjesa. Badanie funkcji zbioru $\nu \in W(\mathfrak{B}_1)$ (a więc tym samym badanie ich dystrybuant $\varphi \in V_0(\mathcal{R})$) można zatem sprowadzić do badania ich transformat Fouriera-Stieltjesa. Ten sposób postępowania jest często stosowany w teorii prawdopodobieństwa (w odniesieniu do miar unormowanych lub ich dystrybuant). Zamiast transformaty Fouriera-Stieltjesa F rozważa się w teorii prawdopodobieństwa częściej funkcję

$$h(y) = \sqrt{2\pi}\,\overline{F(y)}\,,$$

tzn. funkcję

$$h(y) = \int\limits_{\mathcal{R}} e^{ixy}\,d\nu(x) \qquad (\nu \in W(\mathfrak{B}_1))$$

lub

$$h(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\,d\varphi(x) \qquad (\varphi \in V(\mathcal{R}))\,.$$

Funkcja h nosi nazwę *funkcji charakterystycznej* funkcji zbioru $\nu \in W(\mathfrak{B}_1)$ (lub funkcji charakterystycznej funkcji $\varphi \in V(\mathcal{R})$).

2.3. *Niech $\varphi, \psi \in V_0(\mathcal{R})$. Transformata Fouriera-Stieltjesa splotu* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi\bullet\psi$ (por. rozdział XII, § 9 E) *równa się iloczynowi transformat Fouriera-Stieltjesa funkcji φ, ψ.*

Z definicji

$$\varphi\bullet\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\,d\psi(t)\,.$$

Niech F i G będą odpowiednio transformatami Fouriera-Stieltjesa funkcji φ i ψ. Transformatą Fouriera-Stieltjesa splotu $\varphi\bullet\psi$ jest funkcja

$$H(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,d\varphi\bullet\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,d_x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t)\,d\psi(t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,d_x\varphi(x-t)\right)d\psi(t)$$

na podstawie rozdziału XI, 10.2. Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,d_x\varphi(x-t) = e^{-iyt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(x-t)}\,d_x\varphi(x-t) =$$

$$= e^{-iyt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,d_x\varphi(x) = e^{-iyt}\sqrt{2\pi}F(y)\,,$$

przez zastąpienie $x-t$ przez x, więc

$$H(y) = F(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}\,d\psi(t) = \sqrt{2\pi}F(y)G(y)\,, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Z twierdzenia 2.3 wynika, że w zagadnieniach, w których interweniuje splot dystrybuant, wygodniej jest rozważać zamiast transformaty Fouriera-Stieltjesa dystrybuant ich funkcje charakterystyczne, gdyż – jak to bezpośrednio wynika z 2.3 – funkcja charakterystyczna splotu $\varphi\bullet\psi$ dwu dystrybuant jest po prostu iloczynem funkcji charakterystycznych dystrybuant φ i ψ. Czynnik $\sqrt{2\pi}$, który nieco komplikuje wysłowienie twierdzenia 2.3, został dopisany we wzorze (1) przez analogię do wzoru (1), § 1, na transformatę funkcji, gdzie umieszczenie tego czynnika jest celowe ze względu na symetrię wzorów (1) i (3), § 1 (por. także rozdział XIV, § 10). Analogiczne uwagi dotyczą transformat funkcji zbioru $\nu \in W(\mathfrak{B}_1)$.

2.4. *Jeżeli F i G są transformatami Fouriera-Stieltjesa funkcji $\varphi, \psi \in V(\mathcal{R})$ o wahaniu ograniczonym, to*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\,d\psi = \int_{-\infty}^{\infty} G\,d\varphi\,.$$

Analogiczna równość zachodzi także dla funkcji charakterystycznych. Istotnie,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,d\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,d\varphi(x)\right)d\psi(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,d\psi(y)\right)d\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,d\varphi(x)\,.$$

Zmiana kolejności całkowania jest dozwolona na podstawie twierdzenia 10.1, rozdział XI, gdyż funkcja podcałkowa e^{-ixy} jest ograniczona, a całkowanie odbywa się względem miar skończonych.

Niech teraz $f \in \boldsymbol{L}(\mathcal{R})$ i niech φ będzie całką nieoznaczoną funkcji f, tzn.

$$(4) \qquad \varphi(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Z wzoru (1) bezpośrednio wynika, że transformata Fouriera $T(f)$ jest identyczna z transformatą Fouriera-Stieltjesa funkcji $\varphi \in V(\mathcal{R})$ (por. rozdział XI, 5.3). Ponieważ $f(x) = \varphi'(x)$ prawie wszędzie, więc z 2.2 wynika bezpośrednio, że

2.5. *Jeśli $f \in \boldsymbol{L}(\mathcal{R})$ i $F = T(f)$, to prawie wszędzie*

$$(5) \qquad f(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iyx}-1}{iy}F(y)\,dy\,,$$

gdzie całka po prawej stronie jest niewłaściwa typu $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}$.

Funkcja $f \in \boldsymbol{L}(\mathcal{R})$ jest więc jednoznacznie wyznaczona (z dokładnością do funkcji równoważnych) przez swoją transformatę Fouriera $F = T(f)$. Wzór (5) jest analogonem wzoru (13), § 4, rozdział XIV.

Z twierdzenia 2.1 oraz z rozdziału XIV, 2.4, bezpośrednio wynika, że

2.6. *Transformata Fouriera $F = T(f)$ dowolnej funkcji $f \in \boldsymbol{L}(\mathcal{R})$ jest funkcją ciągłą ograniczoną oraz*

$$(6) \qquad \lim_{y\to\infty} F(y) = 0 = \lim_{y\to-\infty} F(y)\,.$$

Wzór (6) jest analogonem twierdzenia 2.5 (i), rozdział XIV.

Podstawiając $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ i $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$ w twierdzeniach 2.4 i 2.3 i uogólniając otrzymany wynik na przypadek zespolony otrzymujemy

2.7. *Jeśli* $f, g \in \tilde{\mathbf{L}}(\mathcal{R})$, *to*

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(f)\cdot g\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\cdot T(g)\,dx \tag{7}$$

oraz

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} T(f*g) = T(f)\cdot T(g)\,, \tag{8}$$

gdzie, jak zwykle, $f*g$ jest splotem funkcji f, g, zdefiniowanym w rozdziale XII, § 8.

Oczywiście wzory (7) i (8) można udowodnić także bezpośrednio metodą analogiczną do zastosowanej w dowodzie twierdzeń 2.4 i 2.3.

Wzór (8) jest analogonem twierdzenia 2.1, rozdział XIV (por. także rozdział XIV, § 10, (8)).

Podstawiając we wzorze (3) $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, zastępując x przez a i b, i odejmując otrzymane równości stronami otrzymujemy

2.8. *Jeśli* $f \in \mathbf{L}(\mathcal{R})$ *i* $F = T(f)$, *to*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{a}^{b} F(y)\, e^{ixy}\,dx \right) dy \qquad (-\infty \leqslant a, b \leqslant \infty)\,. \tag{9}$$

Wzór (9) jest analogonem twierdzenia 4.2 z rozdziału XIV.

Podstawiając w (7) za g funkcję charakterystyczną przedziału $a; b$ otrzymujemy równość dualną do (9):

2.9. *Jeśli* $f \in \mathbf{L}(\mathcal{R})$ *i* $F = T(f)$, *to*

$$\int_{a}^{b} F(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{a}^{b} f(x)\, e^{-ixy}\,dy \right) dx \qquad (-\infty < a, b < \infty)\,. \tag{10}$$

ĆWICZENIA. **1.** Wykazać na odpowiednim przykładzie, że równość (6) nie zachodzi dla transformat Fouriera-Stieltjesa F.

2. Operacja, przyporządkowująca każdej przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru $v \in \mathbf{W}(\mathfrak{B}_1)$ jej funkcję charakterystyczną $h \in \mathbf{C}(\mathcal{R})$, jest liniowa o normie 1.

3. Zbadać, jak wyraża się funkcja charakterystyczna funkcji $\varphi(ax+b)$ $(a \neq 0)$ przez funkcję charakterystyczną funkcji $\varphi(x)$.

4. Funkcja $e^{\lambda(e^{iy}-1)}$ jest funkcją charakterystyczną miary unormowanej μ, określonej na $\mathfrak{B}_1$ wzorami

$\mu([x]) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, gdy $x = 0, 1, 2, \ldots$,

$\mu(A) = 0$, gdy A nie zawiera żadnej liczby całkowitej nieujemnej.

5. *Momentem rzędu m* funkcji $\varphi \in \mathbf{V}(\mathcal{R})$ nazywamy całkę właściwą Lebesgue'a-Stieltjesa $\int_{-\infty}^{\infty} x^m\,d\varphi(x)$. Wykazać, że gdy moment rzędu m istnieje, to funkcja charakterystyczna h funkcji φ jest m-krotnie różniczkowalna,

$$h^{(m)}(y) = i^m \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{ixy}\,d\varphi(x)\,.$$

Moment rzędu m funkcji φ jest wówczas równy $h^{(m)}(0)/i^m$.

6. Jeżeli h jest funkcją charakterystyczną funkcji $\varphi \in \mathbf{V}(\mathcal{R})$, to

$$\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx - \int_{-a}^{0} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos ay}{y^2} h(y)\,dy\,.$$

(Wsk.: Napisać analogon wzoru (3) dla funkcji charakterystycznych i scałkować lewą stronę w przedziałach $0; a$ oraz $-a; 0$.)

7. Jeżeli ciąg funkcji $\varphi_n \in \mathbf{V}_0(\mathcal{R})$ o wahaniu wspólnie ograniczonym jest zbieżny do funkcji $\varphi \in \mathbf{V}_0(\mathcal{R})$ na pewnym zbiorze przeliczalnym gęstym $D \subset \mathcal{R}$ oraz jeżeli

$$*) \qquad \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x)\,,$$

o ciąg funkcji charakterystycznych dystrybuant φ_n jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji charakterystycznej dystrybuanty φ.

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczenia 5, rozdział XI, § 8.)

8. Jeżeli funkcje $\varphi_n \in \mathbf{V}_0(\mathcal{R})$ są wspólnie ograniczone, $\varphi_n \to \varphi \in \mathbf{V}_0(\mathcal{R})$ i jeżeli ciąg $\{h_n\}$ funkcji charakterystycznych dystrybuant φ_n jest zbieżny do pewnej funkcji h ciągłej w punkcie zero, to

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) - \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = h(0)\,.$$

(Wsk.: Z ćwiczenia 6 wynika, że

$$\int_{0}^{a} \varphi_n(x)\,dx - \int_{-a}^{0} \varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos ay}{y^2} h_n(y)\,dy\,,$$

więc dla $n\to\infty$ otrzymujemy

$$\frac{1}{a}\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos y}{y^2} h\!\left(\frac{y}{a}\right) dy\,.$$

Zauważmy, że jeżeli $\varphi(x)\to c$ dla $x\to\infty$, to także $\frac{1}{a}\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx \to c$ dla $a\to\infty$ — por. § 4, (1).)

9. Jeżeli ciąg $\{h_n\}$ funkcji charakterystycznych dystrybuant niemalejących jest zbieżny do pewnej funkcji h ciągłej w punkcie 0, to istnieje funkcja $\varphi \in V_0(\mathcal{R})$ taka, że:

(α) $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ w każdym punkcie x ciągłości funkcji φ,

(β) h jest funkcją charakterystyczną dystrybuanty φ,

(γ) zachodzi równość (*).

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczeń 7 i 8 oraz z twierdzenia 5.8 Helly'ego z rozdziału IX. Zauważyć, że

$$h_n(0) = \lim_{x\to\infty} \varphi_n(x).)$$

10. Jeżeli transformata Fouriera funkcji $g \in L(\mathcal{R})$ jest wszędzie różna od zera, to dla każdej funkcji $f_0 \in L(\mathcal{R})$ równanie całkowe

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)f(t)\,dt = f_0(x)$$

posiada co najwyżej jedno rozwiązanie $f \in L(\mathcal{R})$.

(Wsk.: Jeżeli F, F_0, G są transformatami Fouriera funkcji f, f_0, g, to na mocy (8)

$$F = F_0/(\sqrt{2\pi}G).)$$

Uwaga. Uzyskany wzór na F wraz z wzorem (5) lub jednym z twierdzeń § 3 służyć może za podstawę do obliczenia rozwiązania f równania całkowego [1]).

§ 3. Kryteria zbieżności całek Fouriera [2]).

Niech $f \in \tilde{L}(\mathcal{R})$. Z twierdzenia 1.1 wynika, że dla danej liczby $x \in \mathcal{R}$ istnienie jednej z liczb

$$\lim_{\xi\to\infty} S_\xi(f;\,x)\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(x-t)y\,dt\Big)dy \qquad \Big(\int_0^{\infty} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\xi}\Big), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{ixy}\,dy \qquad \Big(F = T(f),\ \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}\Big) \tag{3}$$

pociąga za sobą istnienie pozostałych liczb i ich równość.

3.1. *Jeśli funkcja $f(t)/(1+|t|)$ należy do $\tilde{L}(\mathcal{R})$ (w szczególności jeśli $f \in \tilde{L}^p(\mathcal{R})$ dla pewnej liczby p, $1 \leqslant p < \infty$), to*

$$f(x) = \lim_{\xi\to\infty} S_\xi(f;\,x) \tag{4}$$

w każdym punkcie x, w którym funkcja

$$\psi_x(t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f(x)}{t}$$

jednej zmiennej t jest całkowalna w pewnym przedziale $-\delta;\,\delta$. W szczególności, równość (4) ma miejsce w każdym punkcie x, w którym funkcja f jest różniczkowalna.

Jeśli $f \in \tilde{L}(\mathcal{R})$, to wyrażenie (1) po prawej stronie równości (4) może być zastąpione przez całki niewłaściwe (2) lub (3).

Ponieważ (por. § 1, (17))

$$S_\xi(f;\,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{\sin\xi t}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\big(f(x-t)+f(x+t)\big)\frac{\sin\xi t}{t}\,dt \tag{5}$$

oraz

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi t}{t}\,dt = 1 \qquad (\xi > 0)\,, \tag{6}$$

więc

$$S_\xi(f;\,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\big(f(x-t)+f(x+t)-2f(x)\big)\frac{\sin\xi t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\psi_x(t)\sin\xi t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x-t)}{t}\sin\xi t\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x+t)}{t}\sin\xi t\,dt - \frac{2f(x)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{t}\sin\xi t\,dt\,.$$

Wszystkie całki po prawej stronie dążą do zera, gdy $\xi\to\infty$, na podstawie rozdziału XIV, 2.4.

3.2. *Jeśli funkcja $f(t)/(1+|t|)$ należy do $\tilde{L}(\mathcal{R})$ (w szczególności, jeśli $f \in L^p(\mathcal{R})$ dla pewnej liczby p, $1 \leqslant p < \infty$) i jeśli funkcja f ma wahanie skończone w pewnym przedziale $P = a;\,b$, to dla każdej liczby $x \in P$*

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \lim_{\xi\to\infty} S_\xi(f;\,x) \tag{7}$$

W przypadku gdy $f \in \tilde{L}(\mathcal{R})$, wyrażenie (1) po prawej stronie równości (7) można zastąpić przez całki niewłaściwe (2) lub (3).

3.3. *Jeżeli funkcja $f \in L^p(\mathcal{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ jest ciągła i o wahaniu skończonym w przedziale (ograniczonym lub nieograniczonym) $P = a;\,b$, to zachodzi (4) dla $x \in P$, przy tym zbieżność we wzorze (4) jest niemal jednostajna w P (dokładniej: jest jednostajna na każdym ograniczonym lub nieograniczonym przedziale domkniętym $P_0 \subset P$, na którym funkcja f ma wahanie ograniczone).*

[1]) Por. np. Schmeidler [1], str. 76 i następne.

[2]) Prasad [1], Pringsheim [1], Hobson [1].

W przypadku $p=1$, *wyrażenie* (1) *może być zastąpione w* (4) *przez całki niewłaściwe* (2) *lub* (3), *które są również zbieżne niemal jednostajnie do* f *w* P.

Na mocy 1.1 wystarczy rozpatrzyć jedynie przypadek pojedynczej całki Fouriera.

Z (5) i (6) wynika, że

$$S_\xi(f;\,x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\big(f(x-t)-f(x-)\big)\frac{\sin\xi t}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\big(f(x+t)-f(x+)\big)\frac{\sin\xi t}{t}dt\,.$$

Wystarczy udowodnić, że obydwie całki po prawej stronie dążą do zera, gdy $\xi\to\infty$, przy tym niemal jednostajnie w przypadku ciągłości. Dowód przeprowadzimy tylko w przypadku drugiej całki (przypadek pierwszej całki rozpatruje się analogicznie).

Dowód jest dokładnie taki sam jak dowód własności (9) w § 3, rozdział XIV. Niech dla danej liczby $\varepsilon>0$ liczba $\delta>0$ będzie taka, że

$$\Delta^*_{h_x}(0,\delta)<\varepsilon\,,$$

gdzie $h_x(t)=f(x+t)-f(x+)$ dla $t>0$ i $h(0)=0$ (funkcję $h_x(t)$ rozważamy jako funkcję jednej zmiennej t). Mamy

$$(8)\qquad\left|\int\limits_0^\infty\big(f(x+t)-f(x+)\big)\frac{\sin\xi t}{t}dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int\limits_0^\delta h_x(t)\frac{\sin\xi t}{t}dt\right|+\left|\int\limits_\delta^\infty f(x+t)\frac{1}{t}\sin\xi t\,dt\right|+\left|f(x+)\int\limits_\delta^\infty\frac{1}{t}\sin\xi t\,dt\right|.$$

Pierwszy składnik w powyższym oszacowaniu jest mniejszy od $2M\varepsilon$, gdzie $M=\sup\limits_{x\geqslant 0}\left|\int\limits_0^x\frac{\sin y}{y}dy\right|$ (por. rozdział XIV, § 3, (7)), drugi i trzeci dążą niemal jednostajnie do zera, gdy $\xi\to\infty$, na podstawie twierdzenia 2.4 i 2.6 z rozdziału XIV, co dowodzi zbieżności do zera całki (8). Podobnie jak w dowodzie własności (9), § 3, rozdział XIV, sprawdzamy, że zbieżność ta jest niemal jednostajna, dokładniej: że jest jednostajna na każdym ograniczonym lub nieograniczonym przedziale domkniętym $P_0\subset P$, na którym funkcja f ma wahanie ograniczone.

Twierdzenia 3.1, 3.2 i 3.3 są analogonami twierdzeń 3.1 i 3.2, rozdział XIV, z teorii szeregów Fouriera. Analogia ta ma zresztą głębsze

podłoże. Można wykazać, że — pomijając założenia zapewniające istnienie całki $S_\xi(f;\,x)$ — przy spełnianiu równości (4) lub (7) interweniują te same lokalne własności funkcji f, które zapewniają zbieżność szeregu Fouriera w punkcie x do $f(x)$ lub $\frac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big)$. Dokładniej, niech f będzie funkcją mierzalną taką, że $f(t)/(1+|t|)$ należy do $\widetilde{L}(\mathcal{R})$, i niech $P=a;\,a+2\pi$. Niech f_0 będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że $f_0(x)=f(x)$ dla $x\in P$. Wtedy różnica $S_\xi(f;\,x)-s_{E(\xi)}(f_0;\,x)$ dąży do zera niemal jednostajnie w P, gdy $\xi\to\infty$ ($E(\xi)$ oznacza tu największą liczbę całkowitą $\leqslant\xi$). W szczególności wynika stąd, że w twierdzeniu 3.3 założenie $f\in\widetilde{L}^p(\mathcal{R})$ można zastąpić przez słabsze założenie, że funkcja $f(t)/(1+|t|)$ należy do $\widetilde{L}(\mathcal{R})$. Zarazem wynika stąd, że dla całek Fouriera prawdziwa jest również zasada lokalizacji, analogiczna do udowodnionej w rozdziale XIV, 3.5. O tym, czy pojedyncza (lub podwójna) całka Fouriera funkcji f jest zbieżna do $f(x)$ lub ogólniej do $\frac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big)$ w punkcie x, decyduje jedynie zachowanie się funkcji f w otoczeniu punktu x. Integralne własności funkcji (zachowanie się na całej prostej) decydują jedynie o istnieniu całek $S_\xi(f;\,x)$ i $T(f)$. Ponieważ miara prostej $\mathcal{R}$ jest nieskończona, założenia, zapewniające całkowalność, są w teorii całek Fouriera bardziej skomplikowane niż w teorii szeregów Fouriera.

ĆWICZENIA. **1.** Niech $f\in L(\mathcal{R})$ ma wahanie skończone w pewnym przedziale $a;\,b$. Jeżeli funkcja f jest parzysta, to

$$\frac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\Big(\cos xy\int\limits_0^\infty f(t)\cos yt\,dt\Big)dy\qquad(a<x<b)\,.$$

Jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to

$$\frac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\Big(\sin xy\int\limits_0^\infty f(t)\sin yt\,dt\Big)dy\qquad(a<x<b)\,.$$

Całki zewnętrzne są niewłaściwe typu $\int\limits_0^\infty=\lim\limits_{\xi\to\infty}\int\limits_0^\xi$.

2. Udowodnić, że

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin y\cos xy}{y}dy=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi, & \text{gdy}\quad 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{4}\pi, & \text{gdy}\quad x=1,\\ 0, & \text{gdy}\quad x>1.\end{cases}$$

(Wsk.: Rozpatrzyć transformaty funkcji charakterystycznej przedziału $-1;\,1$.)

3. Udowodnić, że dla $a>0$ i $x>0$

$$e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{a\cos xy}{a^2+y^2}dy=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{y\sin xy}{a^2+y^2}dy\,.$$

4. Niech $\boldsymbol{R}$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych, określonych na prostej $\mathcal{R}$ i takich, że

$$\lim_{x\to\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0$$

dla $n, m = 0, 1, 2, \ldots$

Udowodnić, że:

(α) Jeśli $f \in \boldsymbol{R}$, to transformata Fouriera $F = T(f)$ także należy do $\boldsymbol{R}$ oraz transformatą Fouriera pochodnej f' jest funkcja $ixF(x)$.

(β) Operacja T, przyporządkowująca każdej funkcji $f \in \boldsymbol{R}$ jej transformatę Fouriera $T(f)$, jest addytywnym, jednorodnym i jednojednoznacznym odwzorowaniem przestrzeni $\boldsymbol{R}$ na siebie. Odwróceniem operacji T jest operacja T^*, przyporządkowująca każdej funkcji $f \in \boldsymbol{R}$ jej sprzężoną transformatę Fouriera $T^*(f)$.

§ 4. Analogon twierdzenia Fejéra. Następujący lemat jest analogonem uwagi (1) z § 6, rozdział XIV:

(1) Jeśli S_ξ jest funkcją mierzalną zmiennej ξ, określoną dla $\xi > 0$ i całkowalną na każdym przedziale $\overline{0;\, a}$ $(0 < a < \infty)$ oraz $\lim\limits_{\xi\to\infty} S_\xi = S$, to także

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\xi}\int_0^\xi S_y\,dy = S. \tag{2}$$

Odwrócenie lematu (1) nie jest prawdziwe: może się zdarzyć, że granica (2) istnieje, a granica $\lim\limits_{\xi\to\infty} S_\xi$ nie istnieje.

Zastępując ewentualnie S_ξ przez $S_\xi - S$, wystarczy udowodnić (1) w przypadku, gdy $S = 0$.

Załóżmy więc, że $\lim\limits_{\xi\to\infty} S_\xi = 0$. Zatem $|S_y| < \varepsilon$ dla $y > y_0$. W rezultacie, dla $\xi > y_0$

$$\left|\frac{1}{\xi}\int_0^\xi S_y\,dy\right| \leqslant \frac{1}{\xi}\int_0^{y_0} |S_y|\,dy + \frac{1}{\xi}\int_{y_0}^\xi \varepsilon\,dy,$$

a więc

$$\left|\frac{1}{\xi}\int_0^\xi S_y\,dy\right| < 2\varepsilon \quad \text{dla } \xi \text{ dostatecznie dużych, c. b. d. o.}$$

W dalszym ciągu jako S_ξ rozpatrywać będziemy wyrażenie $S_\xi(f;\, x)$, zdefiniowane wzorem (17), § 1.

Jeśli funkcja $f(t)/(1+|t|)$ należy do $\widetilde{L}(\mathcal{R})$, to

$$\frac{1}{\xi}\int_0^\xi S_y(f;\, x)\,dy = \frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}(x-t)}{(x-t)^2}\,dt, \tag{3}$$

gdyż

$$\frac{1}{\xi}\int_0^\xi S_y(f;\, x)\,dy = \frac{1}{\pi\xi}\int_0^\xi \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin y(x-t)}{x-t}\,dt\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_0^\xi \frac{\sin y(x-t)}{x-t}\,dy\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1-\cos\xi(x-t)}{(x-t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}(x-t)}{(x-t)^2}\,dt.$$

Zmiana porządku całkowania jest dopuszczalna na podstawie twierdzenia Fubiniego, bo funkcja $f(t)\dfrac{\sin y(x-t)}{x-t}$ dwu zmiennych y, t jest całkowalna płasko w zbiorze $\overline{0;\,\xi} \times \mathcal{R}$.

Oznaczmy

$$\mathcal{F}_\xi(x) = \frac{2}{\pi\xi}\cdot\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}x}{x^2} \tag{4}$$

oraz

$$\sigma_\xi(x) = \sigma_\xi(f;\, x) = \frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}(x-t)}{(x-t)^2}\,dt = \tag{5}$$

$$= f * \mathcal{F}_\xi(x) = \mathcal{F}_\xi * f(x) = \frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\frac{\sin^2\frac{\xi}{t}t}{t^2}\,dt,$$

$$\sigma_\xi(f) = f * \mathcal{F}_\xi \tag{6}$$

dla dowolnej funkcji f, dla której splot (5), (6) istnieje dla każdej liczby $\xi > 0$.

Funkcja $\sigma_\xi(f;\, x)$ jest odpowiednikiem średniej $\sigma_n(f;\, x)$ z teorii szeregów Fouriera (por. rozdział XIV, § 6, (4)), a funkcja $\mathcal{F}_\xi$ jest odpowiednikiem funkcji $\mathfrak{f}_n$ (rozdział XIV, § 6, (3)). Podobnie jak w przypadku szeregów Fouriera, średnia całkowa $\sigma_\xi(f;\, x)$ zachowuje się bardziej regularnie niż całka $S_\xi(f;\, x)$ (por. twierdzenie 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.6, które są analogonami twierdzeń 6.5, 6.1, 6.2, 6.3, 6.6, rozdział XIV, z teorii szeregów Fouriera). Już w tej chwili widać, że zbiór funkcji f, dla których średnia całkowa $\sigma_\xi(f;\, x)$ jest określona, jest obszerniejszy niż zbiór funkcji, dla których całka $S_\xi(f; x)$ jest określona. Istotnie, wyrażenie $\sigma_\xi(f; x)$ jest określone, gdy

$$\text{(7)} \qquad \text{funkcja } \frac{f(t)}{1+t^2} \text{ należy do } \widetilde{L}(\mathcal{R}),$$

tzn. gdy funkcja f jest całkowalna na każdym przedziale ograniczonym $\overline{a; b}$, a funkcja $f(t)/t^2$ jest całkowalna na każdym przedziale nieograniczonym $\overline{-\infty; -a}$, $\overline{a; \infty}$ $(a > 0)$.

Założenie (7) jest oczywiście słabsze niż założenie (18) z § 1, że funkcja $f(t)/(1+|t|)$ należy do $\widetilde{L}(\mathcal{R})$.

Ponieważ $\mathcal{F}_\xi \in \widetilde{L}^q(\mathcal{R})$ dla każdej liczby ξ i każdej liczby q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, więc z nierówności Höldera wynika, że funkcja $\sigma_\xi(f; x)$ jest określona dla dowolnej funkcji $f \in \widetilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, w szczególności dla $f \in \widetilde{C}(\mathcal{R})$. W obydwu przypadkach funkcja $\sigma_\xi(f; x)$ zmiennej x jest ciągła i ograniczona (por. rozdział XII, 8.4).

Zauważmy, że

$$\text{(8)} \qquad \|\mathcal{F}_\xi\|_1 = \frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 y}{y^2}dy = 1.$$

Istotnie, dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin yt}{t}dt\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\varepsilon}^{\xi}\frac{\sin yt}{t}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\varepsilon t - \cos\xi t}{t^2}dt.$$

Zmiana porządku całkowania jest dozwolona, gdyż całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin yx}{x}dx$ jest zbieżna jednostajnie w przedziale $\overline{\varepsilon; \xi}$ (por. rozdział VIII, 6.4). Przechodząc do granicy, gdy $\varepsilon \to 0$, i stosując do całki po prawej stronie twierdzenie 3.6 z rozdziału VII (gdzie $g(t) = 2/t^2$ dla $|t| > 1$ i $g(t)$ równa się odpowiednio dobranej stałej dla $|t| \leqslant 1$) otrzymujemy (por. § 3, (6))

$$\pi\xi = \int_0^{\xi}\pi\,dy = \int_0^{\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin yt}{t}dt\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\xi t}{t^2}dt = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}dt,$$

c. b. d. o.

4.1. *Dla dowolnej funkcji $f \in \widetilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$*

$$\lim_{\xi\to\infty}\sigma_\xi(f) = f \quad \textit{w przestrzeni } \widetilde{L}^p(\mathcal{R}).$$

Dowód twierdzenia 4.1 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 6.5, rozdział XIV.

Niech $\xi_n \to \infty$ $(\xi_n > 0)$. Interpretujmy ciąg $\{\sigma_{\xi_n}(f)\}$ jako ciąg operacji liniowych, odwzorowujących $\widetilde{L}^p(\mathcal{R})$ w $\widetilde{L}^p(\mathcal{R})$. Z (8) oraz z twierdzenia Younga (gdzie $q = 1$ i $r = p$ — por. rozdział XII, 8.3) wynika, że norma operacji σ_{ξ_n} jest $\leqslant 1$. Ponieważ zbiór funkcji schodkowych jest gęsty w $\widetilde{L}^p(\mathcal{R})$ (por. rozdział XII, 2.10 (i)), wystarczy więc udowodnić (por. rozdział XII, 4.6 i 4.2), że

$$\text{(9)} \qquad \sigma_\xi(\chi_P) \to \chi_P \quad \text{według normy } \|\ \|_p$$

dla funkcji charakterystycznej χ_P dowolnego przedziału ograniczonego $P = \overline{a; b} \subset \mathcal{R}$.

Z twierdzenia 3.2 wynika, że

$$\lim_{\xi\to\infty} S_\xi(\chi_P; x) = \chi_P(x) \quad \text{dla każdego } x,\ a \neq x \neq b.$$

Stąd oraz z (1) wynika, że

$$\text{(10)} \qquad \sigma_\xi(\chi_P) \to \chi_P \quad \text{prawie wszędzie.}$$

Ponadto dla dowolnego $x \in \mathcal{R}$

$$0 \leqslant \sigma_\xi(\chi_P; x) = \frac{2}{\pi\xi}\int_a^b\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}(x-t)}{(x-t)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\xi(a-x)}{2}}^{\frac{\xi(b-x)}{2}}\frac{\sin^2 y}{y^2}dy \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 y}{y^2}dy = 1$$

na mocy (8). Jeśli $x < a$ lub $x > b$, to

$$0 \leqslant \sigma_\xi(\chi_P, x) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\xi(a-x)}{2}}^{\frac{\xi(b-x)}{2}}\frac{1}{y^2}dy = \frac{2}{\pi\xi}\cdot\frac{b-a}{(x-a)(x-b)}.$$

Zatem przyjmując

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad a-1 \leqslant x \leqslant b+1, \\ \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{b-a}{(x-a)(x-b)}, & \text{gdy} \quad x < a-1 \text{ lub } x > b+1, \end{cases}$$

mamy $g^p \in L(\mathcal{R})$ oraz

$$|\sigma_\xi(\chi_P, x) - \chi_P(x)|^p \leqslant g(x)^p \quad \text{dla} \quad \xi \geqslant 1.$$

Stąd oraz z (10) wynika (por. rozdział VII, 3.6), że

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma_\xi(\chi_P; x) - \chi_P(x)|^p dx = 0,$$

tzn.

$$\|\sigma_\xi(\chi_P) - \chi_P\|_p \to 0, \quad \text{gdy} \quad \xi\to\infty.$$

4.2. *Dla dowolnej funkcji* $f \in C(\mathcal{R})$

$$\sigma_\xi(f)\to f \quad \textit{dla} \quad \xi\to\infty$$

niemal jednostajnie na $\mathcal{R}$. *Jeśli funkcja* f *jest jednostajnie ciągła na* $\mathcal{R}$, *to* $\sigma_\xi(f)\to f$ *jednostajnie na* $\mathcal{R}$.

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia 4.2, zwrócimy uwagę na fakt, że założenie jednostajnej ciągłości funkcji f w drugiej części twierdzenia 4.2 nie może być pominięte. Istotnie, z rozdziału XII, 8.4 wynika, że dla dowolnej funkcji $f \in \tilde{L}^\infty(\mathcal{R})$ funkcja $\sigma_\xi(f)$ jest jednostajnie ciągła. Jeśli więc $\sigma_\xi(f)\to f$ jednostajnie, to f musi być funkcją jednostajnie ciągłą, bo granica dowolnego ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji jednostajnie ciągłych jest funkcją jednostajnie ciągłą (por. rozdział IV, § 2, ćwiczenie 2).

Twierdzenie 4.2 wynika bezpośrednio z następującego ogólniejszego twierdzenia

4.3. *Niech* $f \in \tilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. *Jeśli funkcja* f *jest ograniczona i jednostajnie ciągła na pewnym zbiorze* $A\subset\mathcal{R}$ (por. rozdział III, § 4), *to*

$$\lim_{\xi\to\infty}\sigma_\xi(f; x) = f(x)$$

jednostajnie na zbiorze A [1]).

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i niech $\delta>0$ będzie taką liczbą, że dla każdego $x\in A$ i każdego t

(11) nierówność $|t|<\delta$ implikuje nierówność $|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon$.

Z wzorów (5) i (8) wynika, że

$$\sigma_\xi(f; x) - f(x) = \frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\big(f(x-t)-f(x)\big)\frac{\sin^2\frac{1}{2}\xi t}{t^2}dt,$$

[1]) Hardy [1].

więc dla $x\in A$

$$|\sigma_\xi(f; x) - f(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\pi\xi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\xi t}{t^2}dt + \frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{-\delta}|f(x-t)|\frac{1}{t^2}dt +$$

$$+\frac{2}{\pi\xi}\int_{\delta}^{\infty}|f(x-t)|\frac{1}{t^2}dt + \frac{2}{\pi\xi}|f(x)|\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{1}{t^2}dt + \frac{2}{\pi\xi}|f(x)|\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{t^2}dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\xi t}{t^2}dt + \frac{2}{\pi\xi}|f|*g_\delta(x) + \frac{2}{\pi\xi}|f(x)|\int_{-\infty}^{\infty}g_\delta(t)\,dt,$$

gdzie

$$g_\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |t|<\delta, \\ 1/t^2 & \text{dla} \quad |t|\geqslant\delta. \end{cases} \tag{12}$$

Funkcja $g_\delta \in \tilde{L}^q(\mathcal{R})$ dla każdej liczby q $(1\leqslant q\leqslant\infty)$, w szczególności dla liczby q takiej, że $1/p+1/q=1$. Stosując więc nierówność Höldera (por. także rozdział XII, 8.4) otrzymujemy (por. (8))

$$|\sigma_\xi(f; x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2}{\pi\xi}(\|f\|_p\cdot\|g_\delta\|_q + M\|g_\delta\|_1),$$

gdzie $M = \sup_{x\in A}|f(x)|$. Zatem

$$|\sigma_\xi(f; x) - f(x)| < 2\varepsilon \quad \text{dla } x\in A \text{ i dostatecznie dużych } \xi,$$

c. b. d. o.

Z twierdzenia 4.3 wynika natychmiast, że

4.4. $\lim_{\xi\to\infty}\sigma_\xi(f; x) = f(x)$ *w każdym punkcie* x *ciągłości funkcji* $f\in\tilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

Stąd oraz z (1) wynika, że

4.5. *Jeżeli funkcja* $f\in\tilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ *jest ciągła w punkcie* x *i granica* $\lim_{\xi\to\infty}S_\xi(f; x)$ *istnieje, to* $\lim_{\xi\to\infty}S_\xi(f; x) = f(x)$.

Dowód następującego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 6.6, rozdział XIV.

4.6. *Dla dowolnej funkcji* $f\in\tilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$

$$\lim_{\xi\to\infty}\sigma_\xi(f; x) = f(x) \quad \textit{prawie wszędzie}\ ^{1}).$$

[1]) Hardy [1].

Wystarczy udowodnić (por. rozdział X, 5.14), że

$$\sigma_\xi(f;x)\to f(x) \quad \text{dla} \quad \xi\to\infty$$

w każdym punkcie Lebesgue'a funkcji f, tzn. w każdym punkcie x, w którym

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi(y)}{y}=0,$$

gdzie

$$\varphi(y)=\int_0^y |f(x-t)-f(x)|\,dt.$$

Ponieważ

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{2}{1+|x|} \quad \text{dla} \quad x\neq 0,$$

więc

$$\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}t}{t}\right|\leqslant\frac{2\xi}{2+\xi|t|} \quad \text{dla} \quad t\neq 0.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i niech $\delta>0$ będzie taką liczbą, że

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|\leqslant\varepsilon \quad \text{dla} \quad 0<|t|\leqslant\delta.$$

Stosując powyższe oszacowania i całkując przez części otrzymujemy

$$\left|\frac{2}{\pi\xi}\int_0^\delta \big(f(x-t)-f(x)\big)\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}\,dt\right|\leqslant\frac{8\xi}{\pi}\int_0^\delta |f(x-t)-f(x)|\frac{1}{(2+\xi t)^2}\,dt=$$

$$=\frac{8\xi}{\pi}\int_0^\delta \varphi'(t)\frac{1}{(2+\xi t)^2}\,dt=\frac{8\xi}{\pi}\left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\cdot\frac{\delta}{(2+\xi\delta)^2}+\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{2\xi t}{(2+\xi t)^3}\,dt\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8\xi}{\pi}\left(\varepsilon\frac{\delta}{(2+\xi\delta)^2}+\varepsilon\int_0^\infty\frac{2\xi t}{(2+\xi t)^3}\,dt\right)=\varepsilon\left(\frac{8\xi\delta}{\pi(2+\xi\delta)^2}+\frac{4}{\pi}\right)<2\varepsilon$$

dla ξ dostatecznie dużych, $\xi>\xi_1$. Analogicznie dowodzi się, że

$$\left|\frac{2}{\pi\xi}\int_{-\delta}^0 \big(f(x-t)-f(x)\big)\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}\,dt\right|<2\varepsilon$$

dla $\xi>\xi_1$. Niech $1/p+1/q=1$. Stosując oznaczenie (12) otrzymujemy

$$\left|\frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{-\delta} f(x-t)\cdot\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}\,dt+\frac{2}{\pi\xi}\int_\delta^\infty f(x-t)\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^\infty |f(x-t)|\,g_\delta(t)\,dt\leqslant\frac{2}{\pi\xi}\|f\|_p\cdot\|g_\delta\|_q<\varepsilon$$

dla ξ dostatecznie dużych $\xi>\xi_2$. Analogicznie

$$\left|\frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^{-\delta} f(x)\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}\,dt+\frac{2}{\pi\xi}\int_\delta^\infty f(x)\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}\,dt\right|\leqslant\frac{2|f(x)|}{\pi\xi}\|g_\delta\|_1<\varepsilon$$

dla $\xi>\xi_3$. Zatem dla $\xi>\max(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$

$$|\sigma_\xi(f;x)-f(x)|=\left|\frac{2}{\pi\xi}\int_{-\infty}^\infty\big(f(x-t)-f(x)\big)\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}t}{t^2}\,dt\right|<6\varepsilon,$$

co kończy dowód twierdzenia 4.6.

Z twierdzenia 4.6 i (1) wynika bezpośrednio, że

4.7. *Jeśli $f\in\tilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ i granica $\lim\limits_{\xi\to\infty}S_\xi(f;x)$ istnieje dla każdego $x\in A$ $(A\subset\mathcal{R})$, to*

$$\lim_{\xi\to\infty}S_\xi(f;x)=f(x) \quad \textit{prawie wszędzie w zbiorze } A.$$

ĆWICZENIA. **1.** Jeśli funkcja $f\in\tilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ posiada w punkcie x granice jednostronne, to

$$\lim_{\xi\to\infty}\sigma_\xi(f;x)=\tfrac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big).$$

2. Jeżeli funkcja $f\in\tilde{L}^p(\mathcal{R})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ posiada granice jednostronne w punkcie x i granica $\lim\limits_{\xi\to\infty}S_\xi(f;x)$ istnieje, to

$$\lim_{\xi\to\infty}S_\xi(f;x)=\tfrac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big).$$

§ 5. Funkcje o kwadracie całkowalnym. Niech $h(x,y)$ będzie zespoloną funkcją mierzalną (względem miary l_2), określoną na płaszczyźnie $\mathcal{R}^2$. Mówimy, że całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^\infty h(x,y)\,dy$$

jest *zbieżna w przestrzeni* $\widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ (lub: *zbieżna w kwadracie*, lub: *zbieżna według normy* $\| \ \|_2$), jeżeli dla każdej liczby $\xi > 0$ funkcja H_ξ, zdefiniowana wzorem

$$H_\xi(y) = \int_{-\xi}^{\xi} h(x, y)\,dx \tag{1}$$

(gdzie $\int_{-\xi}^{\xi}$ jest całką właściwą) należy do $\widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ oraz jeśli istnieje granica

$$\lim_{\xi\to\infty} H_\xi = H \quad \text{w przestrzeni } \widetilde{L}^2(\mathcal{R}),$$

tzn. istnieje funkcja $H \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ taka, że $\lim_{\xi\to\infty} \|H_\xi - H\|_2 = 0$. Piszemy wówczas

$$H(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\,dx \quad \text{w } \widetilde{L}^2(\mathcal{R}) \tag{2}$$

i nazywamy funkcję $H(y)$ *całką niewłaściwą* funkcji h, *zbieżną w kwadracie*.

Jeśli zachodzi równość (2) i równocześnie istnieje całka właściwa lub niewłaściwa (typu $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\xi\to\infty} \int_{-\xi}^{\xi}$) w sensie zdefiniowanym w § 1

$$H_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\,dx \quad \text{dla prawie każdego } y,$$

to $H(y) = H_0(y)$ prawie wszędzie, z czego wynika, że znakowanie (2) nie prowadzi do nieporozumień. Istotnie, ponieważ $\lim_{n\to\infty} H_n = H$ według normy $\| \ \|_2$, więc istnieje podciąg H_{m_n} taki, że $\lim_{n\to\infty} H_{m_n}(y) = H(y)$ prawie wszędzie. Z drugiej strony,

$$H_{m_n}(y) = \int_{-m_n}^{m_n} h(x, y)\,dx \to H_0(y) \quad \text{prawie wszędzie,}$$

więc $H(y) = H_0(y)$ prawie wszędzie, c. b. d. o.

5.1. (i) *Dla każdej funkcji* $f \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ *całka niewłaściwa* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ixy}\,dx$ *jest zbieżna w kwadracie do pewnej funkcji* $F \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$:

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ixy}\,dx \quad w\ \widetilde{L}^2(\mathcal{R}). \tag{3}$$

Ponadto

$$F(y) = \frac{d}{dy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ixy} - 1}{-ix}\,dx \quad \textit{prawie wszędzie.} \tag{4}$$

(ii) *Dla każdej funkcji* $F \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ *całka niewłaściwa*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,e^{ixy}\,dy$$

jest zbieżna w kwadracie do pewnej funkcji $f \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,e^{ixy}\,dy \quad w\ \widetilde{L}^2(\mathcal{R}). \tag{5}$$

Ponadto

$$f(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \frac{e^{ixy} - 1}{iy}\,dy \quad \textit{prawie wszędzie.} \tag{6}$$

Z nierówności Höldera wynika natychmiast, że całki w równościach (4) i (6) są właściwe.

Uogólniając definicję transformat podaną w § 1, funkcję F spełniającą równość (3) oznaczać będziemy także symbolem $T(f)$, a funkcję f, spełniającą równość (5) — symbolem $T^*(F)$.

Z definicji (3) i (5) wynika, że T i T^*, rozważane jako operacje określone na $\widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ o wartościach w $\widetilde{L}^2(\mathcal{R})$, są addytywne. Udowodnimy więcej, mianowicie, że T i T^* są operacjami liniowymi, zachowującymi normę funkcji $f, F \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$, oraz że T^* jest odwróceniem odwzorowania T, i na odwrót. Dokładniej,

5.2. *Jeśli dla dowolnej funkcji* $f \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ $F = T(f)$, *to* $f = T^*(F)$, *i na odwrót.*

Inaczej mówiąc: *każda z równości* (3), (5) *implikuje pozostałą.*

5.3. *Dla dowolnych funkcji* $f, F \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$

$$\|T(f)\|_2 = \|f\|_2, \qquad \|T^*(F)\|_2 = \|F\|_2. \tag{7}$$

Nieco ogólniej:

5.4. *Dla dowolnych funkcji* $f, g \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$

$$(T(f), T(g)) = (f, g) \tag{8}$$

i analogicznie dla dowolnych funkcji $F, G \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$

$$(T^*(F), T^*(G)) = (F, G), \tag{9}$$

gdzie — jak zwykle — $(f,g)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ *jest iloczynem skalarnym elementów* f, g *przestrzeni Hilberta* $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$.

Zespół twierdzeń 5.1-5.4 znany jest pod nazwą *twierdzenia Plancherela*[1]). Twierdzenia 5.1, 5.2, 5.4 są odpowiednikami twierdzeń 8.4, 8.1, 8.3 z rozdziału XIV o szeregach trygonometrycznych. Równość 5.3 jest odpowiednikiem równości Parsevala 8.2, rozdział XIV (por. także rozdział XIV, § 10, (6) i (7)).

Dowód twierdzeń 5.1-5.4 przeprowadzimy w ten sposób, że najpierw zdefiniujemy pewne operacje liniowe T i T^*, odwzorowujące $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$ w $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$, następnie wykażemy, że zachodzą równości (7), (8), (9), (3), (4), (5), (6), wreszcie udowodnimy twierdzenie 5.2.

Niech $\mathbf{Ł}\subset\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych o wahaniu skończonym, równych zeru poza pewnym przedziałem ograniczonym. Niech T i T^* oznaczają na razie operacje addytywne, zdefiniowane wzorami (1)-(4), § 1, wyłącznie dla $f, F\in\mathbf{Ł}$.

Jeśli $f, g\in\mathbf{Ł}$, to

$$\int\limits_{-\xi}^{\xi} T(f)\overline{T(g)}\,dy=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\xi}^{\xi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx\;\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iyt}\,dt}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}\left(\int\limits_{-\xi}^{\xi} e^{iy(t-x)}\,dy\right)dt\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}\frac{\sin\xi(x-t)}{x-t}\,dt\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)S_\xi(\bar{g},x)\,dx\,.$$

Zmiana porządku całkowania jest możliwa, gdyż wszystkie całki są właściwie rozciągnięte na przedziały ograniczone, a funkcje podcałkowe są ciągłe.

Ponieważ $\bar{g}\in\mathbf{Ł}$, więc (por. 3.3) $S_\xi(\bar{g};x)\to\overline{g(x)}$ jednostajnie na $\mathcal{R}$, skąd wynika, że

(10) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(f)\overline{T(g)}\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx=(f,g)\,.$$

Przyjmując $g=f$ otrzymujemy

(11) $$T(f)\in\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})\quad\text{i}\quad\|T(f)\|_2=\|f\|_2\quad\text{dla}\quad f\in\mathbf{Ł}\,.$$

[1]) Plancherel [1], [3], [4], [5].

Stąd wynika, że pierwsza całka w równości (10) jest właściwa. Równość (10) można teraz przepisać w postaci

(12) $$(T(f),T(g))=(f,g)\quad\text{dla}\quad f,g\in\mathbf{Ł}\,.$$

Z (11) wynika, że T jest operacją liniową odwzorowującą $\mathbf{Ł}$ w $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$. Ponieważ operacja T jako liniowa jest jednostajnie ciągła (por. rozdział XII, 4.3) i ponieważ zbiór $\mathbf{Ł}$ jest gęsty w $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$ (bo każdą funkcję schodkową można w $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$ dowolnie blisko przybliżać funkcjami należącymi do $\mathbf{Ł}$), więc odwzorowanie T możemy jednoznacznie przedłużyć na całą przestrzeń $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$ (por. rozdział III, 4.3), przyjmując dla dowolnej funkcji $f\in\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$

$$T(f)=\lim_{n\to\infty}T(f_n)\quad\text{według normy}\ \|\ \|_2\,,$$

gdzie $f_n\in\mathbf{Ł}$ jest dowolnym ciągiem zbieżnym do f w $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$. Tak rozszerzona operacja T jest liniowa. Ponieważ norma i iloczyn skalarny są funkcjami ciągłymi, więc z (11) i (12) wynika, że

(13) $$T(f)\in\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})\quad\text{i}\quad\|T(f)\|_2=\|f\|_2\quad\text{dla}\quad f\in\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})\,,$$

(14) $$(T(f),T(g))=(f,g)\quad\text{dla}\quad f,g\in\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})\,.$$

Jeśli $f\in\mathbf{Ł}$ i $F=T(f)$, tzn.

$$F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx\,,$$

to całkując w przedziale $0;\xi$

$$\int\limits_0^{\xi} T(f)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\xi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx\right)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int\limits_0^{\xi} e^{-ixy}\,dy\right)dx\,,$$

gdyż całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ rozciąga się właściwie tylko na przedział skończony. W rezultacie,

(15) $$\int\limits_0^{\xi} T(f)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ix\xi}-1}{-ix}\,dx\,.$$

Przy dowolnym ustalonym $\xi\in\mathcal{R}$ obie strony równości (15) są ciągłymi funkcjonałami elementu $f\in\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$, gdyż funkcja charakterystyczna przedziału $0;\xi$ i funkcja $\dfrac{e^{-ix\xi}-1}{-ix}$ należą do $\widetilde{\mathbf{L}}^2(\mathcal{R})$. Ponieważ równość (15) zachodzi na zbiorze gęstym $\mathbf{Ł}$, więc — wskutek ciągłości —

równość ta zachodzi również dla dowolnego $f \in \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})$. Różniczkując względem ξ otrzymujemy dla dowolnego $f \in \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})$ i $F = T(f)$

$$F(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ixy}-1}{-ix}\,dx\,. \tag{16}$$

Niech $f \in \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})$ i niech

$$f_\xi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy} \quad -\xi \leqslant x \leqslant \xi\,, \\ 0, & \text{gdy} \quad x > \xi \text{ lub } x < -\xi\,, \end{cases}$$

niech $F = T(f)$ i $F_\xi = T(f_\xi)$. Mamy

$$F_\xi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\xi}^{\xi} f(x)e^{-ixy}\,dx\,. \tag{17}$$

Wzór (17) dowodzi się, przedstawiając funkcję f_ξ jako granicę (według normy $\|\;\|_2$) ciągu funkcji $g_n \in \text{Ł}$, równych zeru poza przedziałem $-\xi;\,\xi$. Dla każdej funkcji g_n wzór (17) jest prawdziwy z definicji T na Ł (por. § 1, (1)). Przechodząc do granicy, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy (17).

Z (13) wynika, że

$$\|F_\xi - F\|_2 = \|f_\xi - f\|_2 \to 0, \quad \text{gdy} \quad \xi \to \infty\,,$$

tzn.

$$F(y) = \lim_{\xi\to\infty} F_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx \quad \text{w } \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})\,. \tag{18}$$

Z (13), (14), (16) i (18) wynika, że operacja T spełnia wszystkie warunki wymienione w twierdzeniach 5.1, 5.3, 5.4.

W analogiczny sposób definiujemy $T^*(f)$ i sprawdzamy, że operacja T^* również spełnia wszystkie warunki wymienione w 5.1, 5.3 i 5.4. Musimy jeszcze wykazać prawdziwość twierdzenia 5.2.

Niech więc $f \in \text{Ł}$ i $F = T(f)$ oraz $g = T^*(F)$, tzn.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{ixy}\,dy \quad \text{w } \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})\,.$$

Z twierdzenia 3.3 wynika, że ostatnia całka niewłaściwa jest również zbieżna do $f(x)$ w zwykłym sensie, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{\xi\to\infty}\int\limits_{-\xi}^{\xi}$, zdefiniowanym na końcu § 1. Stąd oraz z uwagi uczynionej przed twierdzeniem 5.1 wynika, że $f = g$. Zatem

$$f = T^*\big(T(f)\big) \quad \text{dla} \quad f \in \text{Ł}\,.$$

Ponieważ zbiór Ł jest gęsty w $\widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})$, więc z ciągłości T i T^* wynika, że $T^*\big(T(f)\big) = f$ dla każdego $f \in \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})$. Stąd wynika bezpośrednio twierdzenie 5.2.

5.5. *Jeśli $f \in \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})$ i $F = T(f)$, to dla dowolnego zbioru mierzalnego A miary skończonej*

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)\Big(\int\limits_A e^{ixy}\,dx\Big)dy\,.$$

Twierdzenie 5.5 jest analogonem twierdzenia 8.6, rozdział XIV, o całkowaniu wyraz za wyrazem szeregu Fouriera. Aby udowodnić twierdzenie 5.5 wystarczy w równości (8) podstawić $g = \chi_A$.

5.6. *Dla dowolnych funkcji $f, g \in \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})$*

$$T(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}T(f) * T(g)\,. \tag{19}$$

Twierdzenie 5.6 jest analogonem twierdzenia 8.5, rozdział XIV (por. także rozdział XIV, § 10, (9)). Funkcja $fg \in \widetilde{\text{Ł}}(\mathcal{R})$, zatem funkcja $T(fg)$ jest zdefiniowana tutaj wzorem (1), § 1.

Aby udowodnić (19), wystarczy we wzorze (8) podstawić za g funkcję $\overline{g(x)e^{ixy}}$ i zauważyć, że przy ustalonym y transformatą T tej funkcji jest funkcja $\overline{G(y-x)}$ zmiennej x, gdzie $G = T(g)$.

5.7. *Jeśli $f \in \widetilde{\text{Ł}}^2(\mathcal{R})$, $F = T(f)$ i jeśli f jest funkcją o wahaniu skończonym w przedziale otwartym P, to dla $x \in P$*

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{ixy}\,dy\,, \tag{20}$$

gdzie całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ *jest niewłaściwa,* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{\xi\to\infty}\int\limits_{-\xi}^{\xi}$ (por. § 1).

Jeśli ponadto funkcja f jest ciągła w P, to całka niewłaściwa $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ *jest zbieżna niemal jednostajnie w P.*

Przypominamy, że wcześniej udowodniliśmy równość (20), w przypadku, gdy $f \in \widetilde{\text{Ł}}(\mathcal{R})$ (twierdzenie 3.2). Dowód twierdzenia 5.7 oprzemy na twierdzeniach 3.2 i 3.3. Wystarczy udowodnić (por. 3.2 i 3.3), że przy naszych założeniach

$$S_\xi(f;\,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\xi}^{\xi} F(y)e^{ixy}\,dy\,.$$

Niech w tym celu dla ustalonego x i $\xi \geqslant 0$

$$G(y) = \begin{cases} e^{-ixy} & \text{dla} \quad |y| \leqslant \xi, \\ 0 & \text{dla} \quad |y| > \xi \end{cases}$$

i niech $g = T^*(G)$, tzn.

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-ixt} e^{ity} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi}^{\xi} e^{it(y-x)} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \xi (x-y)}{x-y}.$$

Z twierdzenia 5.2 wynika, że $G = T(g)$. Podstawiając funkcje f i g do równania (8) otrzymujemy

$$S_\xi(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin \xi (x-y)}{x-y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi}^{\xi} F(y) e^{ixy} dy, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

W analogiczny sposób dowodzi się (por. 3.1), że

5.8. *Jeśli $f \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ i $F = T(f)$, to w każdym punkcie x, w którym funkcja f jest różniczkowalna,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy,$$

gdzie całka $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\xi \to \infty} \int_{-\xi}^{\xi}$ *jest niewłaściwa* (por. § 1).

Analogonów twierdzeń 5.7 i 5.8 dla szeregów trygonometrycznych zwykle nie formułuje się wyraźnie ze względu na ogólne twierdzenia 3.2 i 3.1, rozdział XIV, i inkluzję $\widetilde{L}^2_{2\pi} \subset \widetilde{L}_{2\pi}$.

ĆWICZENIA. **1.** Pierścień $L(\mathcal{R})$ (por. rozdział XII, § 9 B) posiada dzielniki zera [1]).

(Wsk.: Rozważyć splot transformat dwu dostatecznie regularnych funkcji parzystych f, g o iloczynie równym tożsamościowo zeru, np.

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & \text{gdy } |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{gdy } |x| > \pi, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |\sin x|, & \text{gdy } \pi \leqslant |x| \leqslant 2\pi, \\ 0, & \text{gdy } |x| < \pi \text{ lub } |x| > 2\pi.) \end{cases}$$

2. Transformata Fouriera dowolnej funkcji $f \in L(\mathcal{R})$ jest splotem dwu funkcji $G_1, G_2 \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$.

(Wsk.: Rozważyć transformaty funkcji $\sqrt{|f|}$ i $\sqrt{|f|}\operatorname{sign} f$.)

3. Na to, by funkcja F była postaci $F = G*G$, gdzie $G \in L^2(\mathcal{R})$, potrzeba i wystarcza, by funkcja F była transformatą Fouriera funkcji nieujemnej parzystej $f \in L(\mathcal{R})$.

4. Jedynymi funkcjami $f \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ spełniającymi równanie

$$f * f = f$$

są transformaty Fouriera funkcji $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_A$, gdzie A jest zbiorem o mierze skończonej.

[1]) Żelazko [1].

5. Znaleźć analogiczne scharakteryzowanie rozwiązań równania

$$f * f * f = f \qquad (f \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})).$$

6. Niech $h_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$, gdzie

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

jest n-tym wielomianem Hermite'a (por. rozdział XIII, § 5 E). Wykazać, że

$$T(h_n) = i^n h_n.$$

Uwaga. Ponieważ funkcje h_n tworzą układ ortogonalny, liniowo gęsty w $\widetilde{L}^2(\mathcal{R})$, z ostatniej równości można w prosty sposób otrzymać twierdzenie Plancherela, rozwijając dowolną funkcję $f \in \widetilde{L}^2(\mathcal{R})$ względem układu ortogonalnego unormowanego $g_n = h_n / \|h_n\|_2$.

7. Dla dowolnej funkcji $f \in \widetilde{L}^2(0; \infty)$ całka niewłaściwa

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos xy \, dx$$

jest zbieżna w kwadracie do pewnej funkcji $F = T_c(f) \in \widetilde{L}^2(0; \infty)$,

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_0^\infty \left| F(y) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\xi f(x) \cos xy \, dx \right|^2 dy = 0,$$

zwanej *transformatą cosinusową* funkcji f. Ponadto $f = T_c(F)$ oraz

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{d}{dy} \int_0^\infty f(x) \frac{\sin xy}{x} dx, \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^\infty F(y) \frac{\sin xy}{y} dy.$$

8. Dla dowolnej funkcji $f \in \widetilde{L}^2(0; \infty)$ całka niewłaściwa

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin xy \, dx$$

jest zbieżna w kwadracie do pewnej funkcji $F = T_s(f) \in \widetilde{L}^2(0; \infty)$, zwanej *transformatą sinusową* funkcji f. Ponadto $f = T_s(F)$ oraz

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{d}{dy} \int_0^\infty f(x) \frac{1 - \cos xy}{x} dx, \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^\infty F(y) \frac{1 - \cos xy}{y} dy.$$

Uwaga. Powyższa definicja transformaty cosinusowej i sinusowej jest uogólnieniem definicji podanej w § 1, ćwiczenie 1. Związek wyżej zdefiniowanych transformat cosinusowej i sinusowej z transformatą Fouriera, zdefiniowaną w § 5 w przypadku funkcji parzystych i nieparzystych, jest taki sam, jak związek między transformatami cosinusowymi i sinusowymi w § 1, ćwiczenie 1, a transformatami Fouriera z § 1.